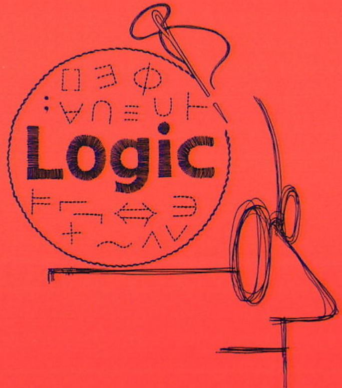
Kurt Gödel

ゲーデルと 20世紀の論理学（ロジック）

田中一之［編］

2

完全性定理とモデル理論



東京大学出版会

ゲーデルと20世紀の論理学（ロジック）

田中一之［編］

❷

完全性定理とモデル理論

東京大学出版会

Gödel and Logic in the 20th Century ②
Completeness Theorem and Model Theory
Kazuyuki TANAKA, Editor
University of Tokyo Press, 2006
ISBN4-13-064096-8

刊行にあたって

今年 2006 年は，ゲーデルの生誕 100 年にあたる．19 世紀半ばのブールの仕事を近代論理学の出発点とみなすと，現在まで約 150 年の歴史のちょうど中間辺りで，20 代半ばの青年ゲーデルが不完全性定理を証明し，論理学（ロジック）に革命的転回をもたらしたことになる．

『TIME』誌が発表した 20 世紀の偉大な科学者・思想家 20 人（組）に，アインシュタイン，フロイト，ライト兄弟らと並んで，ゲーデル，そして論理学（ロジック）に関係の深いテューリングとウィトゲンシュタインが選ばれた．近隣分野から 3 人も名を連ねたことは，20 世紀の科学や思想の発展に論理学革命がいかに重要な役割を担い，またそれがいかに高く評価されているかを示している．

現代論理学の発展に寄与した人たちの多くは数学者である．ゲーデルは言わずもがな，ウィトゲンシュタインも流体力学という数学に近い分野から出発している．したがって，現代論理学の議論は否応なく数学的なのだが，数学の一分野に収まっているわけではない．ゲーデル自身，後半生は主に哲学を研究し，クワインやクリプキのように哲学サイドに立ちながら数理論理学に大きく貢献している研究者も少なくない．20 世紀の論理学（ロジック）の特徴はまさにこのような文理融合にあるのだが，このダイナミズムが文系・理系を分けたがる日本固有の文化のもとで敬遠や誤解を生む要因になっているとすれば大変残念である．また，この分野を「数学基礎論」と呼ぶ慣習が，わが国の論理学（ロジック）の健全な発展を妨げていると指摘する声があることも付言しておく．

本シリーズは，ゲーデルの生誕 100 年を記念し，彼の仕事を基点に 20 世紀の論理学（ロジック）の歩みを振り返り，公平な歴史認識のもとで，現代論理学の核となる概念や事実を立体的かつビビッド (vivid) に解き明かそうという試みで

企画された．そのため，数学と哲学の両面から解説を与えるという編集方針をまず打ち立てた．幸いなことに両陣営からご理解を得て，各分野の第一人者に執筆をお引き受けいただいた．前代未聞ともいえるこの試みが成功しているかいないかは読者諸賢の判断に委ねるしかないが，本シリーズの刊行を機縁に，論理学（ロジック）周辺のさまざまな分野の間に新しい対話が生まれることになれば，編者としてこれにまさる喜びはない．

すでに論理学（ロジック）について一通りの知識をお持ちの方にも，初めてふれる方にも興味をもって読んでいただけるように記述を工夫しているが，なかでも次世代を担う若い人たちには，全巻を読みこなし，広い視野と正しい認識をもつ新時代のロジシャンになっていただきたい．そしていつか「21世紀のロジック」について，立派なシリーズが刊行されることを期待したい．

編　者

はじめに

本書はゲーデル生誕 100 周年の記念事業として刊行中のシリーズ「ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）」全 4 巻の第 2 巻目である．第 1 巻では，ゲーデルの仕事が与えた影響を中心に，20 世紀のロジックの歴史的流れを俯瞰した．本巻以降では，ゲーデルの主要な業績を解き明かすとともに，それを出発点，あるいは主な原動力として形成されてきた現代ロジックの各研究分野を紹介する．

本巻のテーマは，ゲーデルの完全性定理と，モデル理論および意味論である．ゲーデルは，1929 年に提出した博士論文ならびに公表論文において 1 階述語論理が完全であること，つまり恒真な命題はすべてそこで証明可能になることを示した．現代的に述べれば，シンタックス（形式，証明）とセマンティクス（意味，真理）の等価性を確立したことになるが，当時はセマンティクスの概念が未分化であったために，その主張は今日のものよりやや弱い．その後，タルスキらによってモデル理論（意味論）が開発されるが，それは数学の構造に関する研究と言語の意味論的分析の二面性をもっており，本巻でも両側面から立体的な解説を与える．

以下に，本巻の構成と内容を簡単に述べる．まず「序」では，ゲーデルの完全性定理が誕生した背景，ゲーデルの証明の概要，および関連する諸結果と当時のロジックの動向などを展望する．ゲーデルの未公開論文を含んだ『ゲーデル全集』の発行により，興味深い新事実が次々と明らかにされているが，たとえばゲーデルの博士論文には，公開論文では削除された序文が付いており，そこには彼がすでに不完全性定理のアイデアを得ていたと思わせる文言が見出せるのである．

第 I 部では，ゲーデルの完全性定理を中心的題材としつつ，1 階述語論理に

関する重要事項を総合的に見直す．ここでは，とくにタブロー法を題材に用いて「述語論理の基本定理」を証明し，それから完全性定理などを導く．この論法により，完全性定理の数学的エッセンスが無限木に関する「ケーニヒの補題」であることが顕示される．ゲンツェンのLKやヒルベルト流の公理系も導入し，多角的視点から述語論理を扱う．

第II部では，モデル理論の専門家の坪井明人先生が，コンパクト性定理を軸にして，モデル理論の基本事実を解説する．モデル理論におけるコンパクト性定理は，無限個のモデルから新たなモデルを創出する手法の一つであり，それはウルトラプロダクトを用いたコンパクト性定理の証明において，はっきりみてとれる．ここでは，モデル理論の技法によって，実閉体の量化記号消去（タルスキの定理）が，エレガントに証明される．また，範疇性と安定性の関係など，現代モデル理論における議論の典型をみることができる．

第III部は，言語哲学者の野本和幸先生が，19世紀末から一世紀以上にわたるモデル理論・意味論の発展と変遷を一大叙事詩にまとめる．これだけ長期にわたる多数の研究を一つにまとめた解説は壮観であり貴重である．フレーゲやレーヴェンハイムに始まり，タルスキの真理理論やモンタギュー文法などを経て，クリプキ・モデル，クワインの「不透明性」，そして1990年代のカプランの仕事までカバーしている．

最後に，後続巻の内容について述べておく．第3巻『不完全性定理と算術の体系』では，ゲーデルの二つの不完全性定理に現代的な証明を与えるとともに，算術の形式体系に関するその後の研究成果について解説する．第4巻『集合論とプラトニズム』は，ゲーデルの数理哲学を解説し，それを底流とした現代集合論の研究動向を紹介する．引き続き，ご声援をいただければ幸いである．

2006年9月　編　者

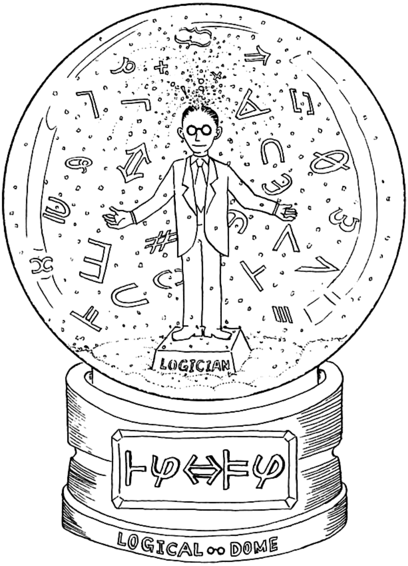
目 次

第 III 部　論理的意味論の源流，モデル論の誕生，そしてその展開——論理と言語の間で　野本和幸 *191*

序

ゲーデルの完全性定理とその背景

田中一之



この序では，ゲーデルの完全性定理が誕生した背景，ゲーデルの証明の概要，および関連する諸結果についてみていく．若干の予備知識を仮定しているので，ロジックについてまったく不慣れの方は先に本書第I部を読んでいただくのがいいだろう．

ゲーデルの完全性定理の主張は，1 階述語論理において，

恒真命題はすべて証明可能である

というものである．1 階述語論理というのは，数学における代数的構造やある固定した領域における要素間の関係を扱う論理であり，ふつう $\forall x$（任意の x について）や $\exists x$（ある x が存在して）のような記号（量化記号という）を用いて形式化される．本書では，この論理を単に「1 階論理」とも「述語論理」とも呼ぶ．数学の基礎付けの観点から 1 階論理の重要性を強く意識し，最初にその公理系を規定したのは 20 世紀前半を代表する大数学者ヒルベルトである．彼はこの論理の完全性を未解決問題として提起し，それを解決したのがゲーデルである．

ゲーデルは，1929 年に博士論文の主要結果としてこの定理を証明し，それを少し修正して雑誌に公表した．これまで完全性定理といえばこの雑誌論文のみが理解の手がかりであったが，博士論文やその他の未公開資料が『ゲーデル全集』（第I巻 [Feferman 1986]–第V巻 (2003)）などによって公開され，興味深い新事実が次々明らかになっている．なかでも，雑誌論文にはない序文があり，そこにはすでにゲーデルが不完全性定理の着想を得ていたと思わせる文言が見出せる．これについては，本文でくわしく解説する．

さて，ゲーデルが実際に証明したのは，上の主張の対偶で，「証明可能でない命題には，反例のモデルが存在する」ことであった．その後，その証明を改良して，より一般的な状況のもとで，より具体的にモデルを構成してみせたのは，ヘンキン (1949) である．したがって，今日の定理は「ゲーデル・ヘンキンの完全性定理」と呼ぶべきかもしれないが，ここでは慣例に従って単に「ゲーデルの完全性定理」と呼ぶ．

私は，1983–84 年頃，カリフォルニア大学バークレー校でヘンキン先生のティーチング・アシスタントをしていたことがある．ある日，ヘンキン先生と

一緒に，数名の学生たちと連れだってキャンパスを歩いているとき，ロジックを専門としていない学生の一人が「完全性定理はどうして完全性定理というのですか」と先生に質問した．すると，ヘンキン先生は，「論理が完全であるというのは，ドイツ語でvollständigといって，モデルがいっぱいあるという意味なんだ」と，道の真ん中で両手をひろげ何かたくさん湧き上がってくるような大げさなジェスチャーをされた．「不完全性定理」の「(不) 完全」との意味の違いを強調されたのである．

いま思い返すと，当時ゲーデルとか不完全性定理という名は，日本ではほとんど知られていなかったが，アメリカでは一般の人たちの間にもかなり浸透していたのである．だから，上の学生のように，たぶん不完全性定理について聞きかじっていて，それでは完全性定理とはいったい何だろうと思うのは自然であった．しかし，逆に日本では，不完全性定理よりもむしろ完全性定理のほうが教科書などでいくらか普及していたかもしれない．同じ頃の話であるが，私と指導教官のハーリントン先生との会話でもこんなことがあった．先生が「ゲーデルの定理によって $\cdots$」といわれたので，私は「ゲーデルのどの定理ですか，完全性定理ですか」と真面目に聞き返した．すると先生は，「この国でゲーデルの定理といえば，不完全性定理のことなんだよ」と，微苦笑された．

完全性定理と不完全性定理は，異なる対象についての異なる主張である．しかし，この二つの定理は思想的に深いところでつながっているので，二つを比較しながら正しく理解しておくことが，ロジックの学習において最も重要なポイントである．この序の目的は，完全性定理とその周辺を知ることであるが，その大部分は不完全性定理の背景でもある．両者の間の具体的な関係については，第3巻の序でさらにくわしく語ることになるだろう．

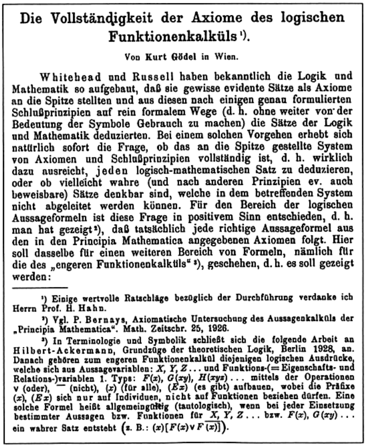
さて，本序は，3つの節で構成され，それぞれの内容は以下の通りである．最初の節では，1階述語論理や完全性に関する歴史的背景を説明する．第2節では，ゲーデルのオリジナルな証明の概略を紹介する．第3節では，同時代のスコーレムやエルブランの仕事など，完全性定理に関連する諸結果を概観する．なお，スコーレムとエルブランの定理の詳細は，第I部付録にある．本序の最後に，集合の基本知識を付録として簡単にまとめてあるので，必要

に応じて参照されたい.

0.1　背景

この節の目的は，ゲーデルの博士論文の序文が解読できる程度に，完全性定理の背景を知ることである．その序文は，彼の他の発表論文ほど推敲を重ねておらず，読みづらい反面，本音が見え隠れして面白い．とくに，（高階論理の）不完全性定理が証明される可能性をはっきり述べている点が注目される．なお，雑誌投稿用に書き直された論文では，この序文は削除された．

先に述べたように，1 階述語論理は，あらかじめ定めた領域における要素間の関係（述語）を扱う論理である．この論理で用いられる量化記号 $\forall x$，$\exists x$ は，領域の要素を指すために使われ，「すべての関係について」とか「ある関数が領域上に存在して」とかいった表現は 1 階論理では認められない．1 階論理に，これらの表現（2 階量化）を加えたものを 2 階論理 (second order logic) という．たとえば，2 つの集合（部分領域）の大きさ（濃度）が等しい



Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls[1]).

Von Kurt Gödel in Wien.

Whitehead und Russell haben bekanntlich die Logik und Mathematik so aufgebaut, daß sie gewisse evidente Sätze als Axiome an die Spitze stellten und aus diesen nach einigen genau formulierten Schlußprinzipien auf rein formalem Wege (d. h. ohne weiter von der Bedeutung der Symbole Gebrauch zu machen) die Sätze der Logik und Mathematik deduzierten. Bei einem solchen Vorgehen erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob das an die Spitze gestellte System von Axiomen und Schlußprinzipien vollständig ist, d. h. wirklich dazu ausreicht, jeden logisch-mathematischen Satz zu deduzieren, oder ob vielleicht wahre (und nach anderen Prinzipien ev. auch beweisbare) Sätze denkbar sind, welche in dem betreffenden System nicht abgeleitet werden können. Für den Bereich der logischen Aussageformeln ist diese Frage in positivem Sinn entschieden, d. h. man hat gezeigt[2]), daß tatsächlich jede richtige Aussageformel aus den in den Principia Mathematica angegebenen Axiomen folgt. Hier soll dasselbe für einen weiteren Bereich von Formeln, nämlich für die des „engeren Funktionenkalküls“ [3]), geschehen, d. h. es soll gezeigt werden:

[1]) Einige wertvolle Ratschläge bezüglich der Durchführung verdanke ich Herrn Prof. H. Hahn.

[2]) Vgl. P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica“. Math. Zeitschr. 25, 1926.

[3]) In Terminologie und Symbolik schließt sich die folgende Arbeit an Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928, an. Danach gehören zum engeren Funktionenkalkül diejenigen logischen Ausdrücke, welche sich aus Aussagevariablen: $X, Y, Z \ldots$ und Funktions-(= Eigenschafts- und Relations-)variablen 1. Typs: $F(x)$, $G(xy)$, $H(xyz) \ldots$ mittels der Operationen $\vee$ (oder), $\overline{}$ (nicht), (x) (für alle), (Ex) (es gibt) aufbauen, wobei die Präfixe (x), (Ex) sich nur auf Individuen, nicht auf Funktionen beziehen dürfen. Eine solche Formel heißt allgemeingültig (tautologisch), wenn bei jeder Einsetzung bestimmter Aussagen bzw. Funktionen für $X, Y, Z \ldots$ bzw. $F(x)$, $G(xy) \ldots$ ein wahrer Satz entsteht (z. B.: $(x)[F(x) \vee \overline{F(x)}]$).

図 0.1　雑誌に掲載された「完全性定理」の論文 [Gödel 1930]

ことを表すには，それらの間に 1 対 1 関数が存在するという 2 階量化が用いられる．また，領域上の関係についての関係を 2 階の関係といい，「すべての 2 階の関係について」というような表現（3 階量化）を認めるのが 3 階論理 (third order logic) である．以下同様に拡張される．2 階以上の論理は高階論理 (higher order logic) と呼ばれる．有限階の論理をすべてまとめて扱うのが（単純）型理論 (type theory) である．

ペアノ算術など今日の多くの数学理論は，1 階述語論理に，必要な数学的公理を付加することで定義される．一方，2 階以上の論理では，その中で自然数を定義して算術を展開することもできる．たとえば，n 個の要素をもつ集合（の属性）で自然数 n を表せばよい．これが，数学を論理に還元させるフレーゲ・ラッセルの論理主義の基本的な考えである．これとは別に，ペアノ算術のような 1 階理論を 2 階量化を許すように拡張してつくる 2 階理論（2 階自然数論）もある．

20 世紀の初め，形式論理の主役は型理論であった．1 階論理は，型理論を制限することで，ヒルベルトが 1917–18 年の講義において初めて導入したものである．その講義ノートは，10 年後に弟子のアッケルマンとの共著書として公刊された [ヒルベルト・アッケルマン 1954]．そこでは，「述語論理」という用語はまだ使われておらず，「述語」を "関数" と呼んでいたので，「1 階述語論理」は，"制限された関数計算" である．なお，「述語論理」という用語や，今日の意味の「関数記号」が導入されるようになったのは，ヒルベルトとベルナイスによって書かれた『数学の基礎』第 1 巻 (1934) [ヒルベルト・ベルナイス 1993] 以降である．

1 階論理の完全性は，1928 年にヒルベルトがボローニャの国際会議と教科書 [ヒルベルト・アッケルマン 1954] の中ではじめて未解決問題として公にしたものであるが，ヒルベルトの「完全性」へのこだわりは長く，その起源は 19 世紀末まで溯る．ヒルベルトは 1899 年に『幾何学基礎論』[ヒルベルト 1969] を公刊し，後年の形式主義につながる公理論の立場を打ち出した．彼の思想は，その本の改訂版に付録として収められた「数の概念について」(1900) でわかりやすく述べられている．それによると，数学の議論には，自然数から有理数，有理数から実数を構成するような「生成的な方法」と，幾



図 0.2 1900 年当時のヒルベルト

何学のように点や直線などの対象の存在を初めから仮定して，それらの関係を公理で規定する方法があるとし，続けて以下のように述べている．

> 然らば必然の問題としてこれ等諸公理の「無矛盾性」及び「完全性」を証明する問題が生起する．即ちここに設定した公理を用ひるとき決して矛盾に到達しないこと，更にこの一組の公理は幾何学のすべての定理を証明し得るに足るものなることが証明されなければならない．ここに示した研究法を**公理的な方法**と名付けることにしよう．[ヒルベルト 1969, p.208．強調は原文のまま．]

そして，さらに彼はいう．

> 生成的方法は確かに高度の教育的及び発見的な価値あるものではあるが，我々の知識の内容を決定的に記述し且完全に論理的に保証するには公理的方法の方が尚優れて居る．[同，p.209]

ヒルベルトは，群論や環論のような代数理論が構造の集まりを対象とするのと同じように，ユークリッド幾何学のような公理系も同時にたくさんのモデルを対象とすると考えている．ある理論のモデルと同型なものはやはりその理論のモデルになるので，どんな公理系のモデルも無数に存在するからである．つまり，彼にとって数学理論はすべて図式的 (schematic) である．

これに異を唱えたのが，フレーゲである．彼は，幾何学における公理は自明な真理であるという信念をもっており，ヒルベルトの形式主義的公理論は受け入れ難かった．1900 年前後のヒルベルトとフレーゲの興味深い往復書簡が [野本 2002] に翻訳されており，ヒルベルトの公理論に反対するフレーゲの論文「幾何学の基礎について」(1906) なども [野本・飯田 2001] に収められている．ここでは，フレーゲの手紙に対するヒルベルトの返事の草稿，ないし抜粋とされる文 (1899) から，1 カ所だけ引用しておく．

> 「公理が真であることから，公理は互いに矛盾しないということが帰結する」というあなたの命題は，私は大変興味深いものでした．と申しますのも，わたしはこのような事柄について考え，著述をし，講演するときには，正反対のことを言っているからです．つまり，私がいっているのは，もし任意に措定された公理が互いに矛盾しないとすれば，そうした公理は真であり，公理によって定義されたものは存在するのだということです．それは私にとって真理と存在の規準なのです．「どの方程式も根を持つ」という命題を公理として算術の公理に付け加えたときに，決して矛盾に到達しえないとすれば，直ちにその命題は真である，すなわち，根の存在の証明であるわけです．[野本 2002，p.74]

『幾何学基礎論』においてヒルベルトは，ユークリッド幾何に対する（可算）モデルを実数（代数的数）上につくり，その無矛盾性を実数論（ヒルベルトは「算術」と呼んでいる）の無矛盾性に還元した．そこで，「実数論の無矛盾性を証明せよ」というのが，1900 年パリで行われた国際数学者会議で提起されたヒルベルトの第 2 問題となる．しかし，このとき実数論自体の公理系はまだ正確に規定されていなかったのである．

実数論の公理化の難しさは，完備性の記述にあり，それは公理系の完全性とも不可分の関係にある．ヒルベルトは，実数とその上の演算に関する代数的公理系をまず定めてから，そのモデルの中で最大の（complete, 完備な）ものであるという公理（完備性の公理）を最後に付け加えた．ここで，モデルが最大かどうかは，そのモデルの外の世界に依存する性質なので，完備性

の公理は厳密な公理論の立場と相容れないようにみえる．しかし，ヒルベルトは，1904 年ハイデルベルグで行われた国際数学者会議で，実数の完備性の公理は，自然数の帰納法の公理に相応するもので，理論的に問題はないとしている．また彼は，「完備性の公理」にあたるものを，『幾何学基礎論』の公理系にもあとの版から追加している．

他方，実数論を 2 階自然数論の中で形式化する方法もデデキントの頃から知られている．2 階自然数論は，1 階のペアノ算術に，自然数の「関係（=述語，集合)」についての 2 階量化を許したものである．有理数を自然数と 1 対 1 に対応付け，「切断」により有理数の集合として実数を定義すれば，それは結局自然数の集合（関係）として扱える．したがって，実数論は 2 階自然数論の中で容易に展開できる．

すべてのモデルが互いに同型になるような理論は範疇的 (categorical) であるというが，デデキントの議論 [デデキント 1961] により，2 階自然数論は範疇的である．しかし，2 階自然数論は，上に述べた実数論の公理系と同様，完成した形式体系ではない．2 階量化記号の形式的扱いが困難だからである．2 階自然数論の一つの形式化として，2 階算術の体系 Z_2 があるが，この公理系は範疇的ではない．

さて，話を先に進めるために，ここで「完全性」の概念を厳密にしておかなければならない．ヒルベルトは，理論あるいは演繹体系に関する完全性に二つの定義を与えている．一つは，恒真な命題がすべてその理論から形式的に導出できることで，これを「意味論的完全性 (semantical completeness)」という．もう一つは，実数の完備性にならい，（無矛盾な）理論の極大性として定義される（1917–18 年の講義）．後者について，もう少し説明しよう．ある論理式とその否定を両方導出し得る理論は矛盾するという．そして，（無矛盾な）理論が完全であるというのは，そこから導出できない論理式を一つでもそれに加えると矛盾することをいう．これは，「統語論的完全性 (syntactical completeness)」，「強完全性 (strong completeness)」，「ポスト完全性 (Post completeness)」などとも呼ばれる．

通常，統語論的に完全な理論は，意味論的にも完全である．そして，意味

論的に完全な理論は，さらに範疇的であれば，統語論的にも完全になる[1)]．したがって，範疇的であり，かつ当然無矛盾でもあると思われる2階自然数論が意味論的に完全であれば，それは統語論的にも完全であり，そこに包摂される実数論も無矛盾で統語論的に完全となって，ヒルベルトの第2問題は解決する．ここでの大きな問題は2階自然数論あるいは2階論理の形式化にあるのだが，それを棚上げしておくと，それらの意味論的完全性を示すための重要ステップはまず1階論理の意味論的完全性になるのである．

ヒルベルトは，1917–18年の講義で，命題論理の公理系が無矛盾であることと，統語論的に完全であることを示した．つまり，それは意味論的にも完全である．ここで注意しておかなければならないのは，彼の命題論理の公理系には命題定数がなく，原子命題は変数であるから，つねに他の命題によって置き換え可能なものとされていることである．したがって，もしもある原子命題が証明されたならば，すべての命題が証明され，公理系は矛盾する．ヒルベルトの証明は，[ヒルベルト・アッケルマン 1954] にも収録されている．他方，ヒルベルトとは独立に，アメリカ人のポストが，コロンビア大学の学位論文 (1920) において，真理値表を用いて同様な結果を導いている．

さて1階論理の話であるが，1階論理が統語論的完全性を満たさないことはすぐにわかる．たとえば，$\exists x R(x) \to \forall x R(x)$ は，1階論理の公理から導出できないが，これを公理としても矛盾は生じない．直観的にいうと，唯一つの要素からなる構造を考えれば，この主張は真だからである．これは，アッケルマンによる考察で，詳細はヒルベルトとアッケルマンの教科書 (1928) [ヒルベルト・アッケルマン 1954] に載っている．それでは，意味論的な完全性はどうか？　ヒルベルトは，先に述べたアッケルマンとの共著や，ボローニャでの国際会議（1928年9月）で，それを未解決問題として提起した．

いよいよゲーデルの登場である．ゲーデルは，1924年18歳のときウィーン大学で物理の勉強を始め，1926年に数学，とくに数論に転向，さらに1928年頃から数理論理学に強い興味をもった．1928年3月，ヒルベルトの論敵ブラウワーの講演会がウィーンで行われた．哲学界から遠ざかっていたウィト

1)　ゲーデルは，二つの完全性の違いを重視していない．それは，真実の世界は唯一つしかない（範疇的）という彼の哲学を反映している．



図 0.3　ブラウワー



図 0.4　ウィトゲンシュタイン

ゲンシュタインは，この講演会の影響で哲学に復帰したという．その講演によるものかどうかはわからないが，ゲーデルもブラウワーの思想に刺激を受け[2)]，それが博士論文の結果を得るためのヒントとなったようである．

完全性定理を証明したゲーデルの博士論文の原稿は，1929 年 7 月に，ハーン教授とフルトヴェングラー教授に提出された．

それでは，ゲーデルの博士論文の序文をみてみよう．

> 序文
>
> 以下に報告する研究の主目的は，いわゆる「制限された関数計算」に対する公理系の完全性を証明することである．この体系は，ホワイトヘッドとラッセル (1910) の第 1 巻[3)] *1 - *10，同じくヒルベルトとアッケルマン (1928)（以下，H.A. と省略する）の III 章 §5 に与えられているものである．ここで，「完全性」とは，「制限された関数計算」において表現されたすべての恒真論理式（レーベンハイムの恒真な 1 階論理式 (Zählaussage)）が，

2)　ゲーデルは，ブラウワーの講演会の際にウィトゲンシュタインを目撃したとのちに語った．ワン [ワン 1995] は，このことからゲーデルはブラウワーの講演を聞いたとしているが，それはゲーデル本人が聴衆として参加したかどうかの確証にはならないという意見もある．[Mancosu 1988] にブラウワーの 2 つのウィーン講演録の英訳がある．

3)　『プリンキピア・マテマティカ』のことである．

> 公理から形式的推論の有限列によって導出できることを意味する[4]．この主張が，「1 階論理式からなる無矛盾な公理系は，モデル (realization) をもつこと」と同値であることも容易にわかる（ここで，「無矛盾」は，矛盾が有限の形式的推論で導出できないことである）．

ある理論の無矛盾性を証明する一般的手法は，それに対するモデルの存在を示すことである．ゲーデルは，自らの結果が（1 階論理における）この一般的方法の「理論的完成」を意味すると述べて，さらにつぎのように続ける．

> 公理系の無矛盾性からモデルの構成可能性を直接的に導くことはできないと L.E. ブラウワーも強調している．他方，公理系によって導入した概念の存在は，公理の無矛盾性によって確立されるもので，証明するものではないという考え方もあるかもしれない．だが，このような考えは，（そうして示される存在概念が，通常の初等的構造と同様な法則に従うという前提のもとでは，）どんな数学の問題も必ず解決しうる〔訳注：証明もしくは反証しうる〕ことを自明の理として仮定することになる．あるいは，もう少し正確にいうと，どんな問題も解決不能であることは証明できないことを仮定することになる．というのは，（たとえば，実数に関する）ある問題が解決不能であることが証明されたら，上のような存在概念によれば，実数論の公理系に対する 2 つの同型でないモデルが存在することになるだろう．しかし，他方で，実数論のどの 2 つのモデルも同型であることが証明できるのである．もしわれわれが，厳密に定められた形式的推論による解決だけを問題にするなら，ある問題が解決不能であると証明されることも，ただちに排除できるようなことではけっしてない．

ゲーデルは，ブラウワーの主張からも，その対立者（名前は伏せられているが，ヒルベルトだろう）の主張からも，アイデアを吸収しながら，双方に

4) Zählaussage はスコーレムの用語で，レーヴェンハイムは Zählausdrücke を用いている．これらの用語については，[Eklund 1996] を参照．

反論しているようにみえる．1 階論理については，完全性定理の証明によってブラウワーの主張を退ける．2 階自然数論（実数論）については，完全性定理のようなものを認めてしまうと，解決不能命題 A があったときに，もとの理論に A を加えても，A の否定を加えても無矛盾であることから，同型でない 2 つのモデルが得られ，範疇性に反するというのである．しかし，なぜ解決不能な命題があると考えるかについては，まったく敷衍していない．それは翌年，不完全性定理として明かされる事実の予言であった．

このあと，序文の後半でゲーデルは，自らの証明がブラウワーの拒絶した排中律を用いていることに言及し，直観主義に適合するような証明を得るためには数理論理学の「決定問題」の解決が先決であると述べている．[ヒルベルト・アッケルマン 1954] で数理論理学の中心的問題とされた「決定問題」は，任意に与えた（1 階論理の）論理式の真偽を有限的に判定する手段を求めるものだが，ゲーデルは完全性定理によって，この問題を形式的導出可能性の問題に還元したとも述べている．ここにも，不完全性定理の着想につながる重要な視点が含まれている．

ゲーデルの証明に入る前に，ヘンキンの完全性証明の背景にも一言に触れておきたい．回想録 [Henkin 1996] によれば，彼は博士論文にとりかかる前の段階で，指導教官のチャーチから，2 階自然数論についてくわしく学んだ．博士論文では，最初に 1 階論理の完全性定理に新しい証明を与え，あとで型理論に対する（ある種の）完全性定理を証明している．しかし，実際は，後者のほうを最初に発見したと上の回想録で述べている．型理論についての彼の結果は，「形式的決定不能命題の意味論的な特徴づけを与えている」ので，1 階論理の結果より意義があると考え，論文のクライマックスとして，うしろのほうにおいたそうである．彼の博士論文のもう一つのテーマは，ロジックの代数への応用ないし両者の連携であった．そのために，1 階論理の完全性証明も，代数的な議論展開になったと思われる．背景として，1930 年代に，リンデンバウム，タルスキ，M. ストーンらによる代数的論理学ないしブール代数の研究があったことも無視できない．型理論の完全性定理については，0.3 節でもう一度述べよう．

0.2　ゲーデルの証明

ここでは，完全性定理に対するゲーデルの証明の概要を述べる．原典は，1929年にウィーン大学のハーン教授とフルトヴェングラー教授のもとで書き上げた学位論文を，雑誌発表用に手を加え，翌1930年に公表されたものである．博士論文も雑誌論文も [Feferman 1986] に独英対訳で収録されている．また，雑誌論文の和訳は [廣瀬・横田 1985] にある．証明の筋書きは両者とも同じだが，後者では定理に番号を付けるなどして，全体がみやすく再構成され，またところどころで議論が簡略化されている．

原典の用語や記法，公理の選定などは，ヒルベルト・アッケルマンの教科書(1928)[ヒルベルト・アッケルマン 1954] に従っている．この教科書は1階述語論理の枠組みを明確に規定した最初の出版物であって，完全性定理もその中で問題として提起された．前節にも述べたように，当時「述語論理」という用語はまだ使われておらず，「述語」を “関数” と呼び，「1階述語論理」を “制限された関数計算” と呼んでいる．ここでは簡単のため，すべて現代的な名称に置き換える．関数記号は導入されていないが，等号については議論されているので，関数記号を加えた体系の完備性を示すことに技術的な困難はない．ゲーデルの証明法の弱点は，言語が可算に制限されることであり，この制約はヘンキンの証明 (1949) によって除かれた．

さて，ゲーデルは，その主定理を以下のように表している．

定理 I.　述語論理において，すべての恒真式は証明可能である．

ここで，恒真式とは，任意の対象（構造）において真となる論理式である．自由変数 $x_1, \ldots, x_n$ をもつ論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ の恒真性は，文 $\forall x_1, \ldots, \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ のそれに一致するものとする．なお，文は自由変数をもたない論理式のことである．また，$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が充足可能であるとは，文 $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を成り立たせる構造が存在することである．したがって，論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が充足不能であるとは，文 $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ の

モデルが存在しないことであり，それはまた $\forall x_1 \ldots \forall x_n \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ あるいは $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が恒真であることと同値である．

いま，$\neg\varphi$ が証明可能であるときに，φ は反証可能 (refutable) と呼ぶことにする．すると，定理 I は，以下と同値である．

定理 II. すべての論理式は，反証可能であるか，充足可能である．

とくに，定理 II から定理 I を導くのは，以下の通りである．論理式 φ が恒真 $\Longleftrightarrow$ $\neg\varphi$ が充足不能 $\Longrightarrow$ $\neg\varphi$ が反証可能（定理 II）$\Longleftrightarrow$ φ が証明可能.

定理 I の文面で，"すべての論理式" を "すべての文" に置き換えても，定理の主張は弱まらない．論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が恒真（または証明可能）であることと，文 $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が恒真（または証明可能）であることとは同値になるからである．したがって，定理 II を文に制限して証明すればよい．

定理 II を示すにあたっては，まずすべての文がある種の標準形（$\forall\exists$ 文）に変形できることをいう．これには，いわゆるスコーレムの論法 (1920) が用いられるが，この時代には "関数" でなく "関係" を導入して，式変形を行っていた．たとえば，$\forall w \exists x \forall y \exists z \theta(w, x, y, z)$ に対して，今日のスコーレム標準形 $\forall w \forall y \theta(w, f(w), y, g(w, y))$ の代わりに，

$$
\begin{aligned}
&\forall w \exists x F(w, x) \land \forall w \forall y \exists z G(w, y, z) \\
&\land \forall w \forall y \forall x \forall z((F(w, x) \land G(w, y, z)) \to \theta(w, x, y, z))
\end{aligned}
$$

が用いられる．ゲーデルの議論の進め方は，まず任意の文（論理式）を「K 表現」と呼ぶ一種の冠頭標準形に変形し（定理 III），さらに量化記号ブロックの個数に関する帰納法（定理 IV）によって，K 表現を $\forall\exists$ 文に還元するというものである．この部分は，第 I 部付録で述べるスコーレムの論法と基本的に同じである．つまり，文 σ が恒真であれば，そのスコーレム標準形 σ^S も恒真である．他方，σ^S が証明可能であれば，σ も証明可能になることは定義から明らかである．したがって，あとはつぎの定理を証明すればよい．

定理 V. すべての $\forall\exists$ 文は，反証可能であるか，充足可能である．

この証明のために，いくつかの準備が必要である．ここでは簡単のために，$\forall\exists$ 文の具体例 $\varphi \equiv \forall y_0 \forall y_1 \exists z_0 \exists z_1 \theta(y_0, y_1; z_0, z_1)$ を使って考えてみよう．可算無限個の変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ を用意し，それらの対を以下のように並べる．

$$
\begin{aligned}
&w_0 = (x_0, x_0),\\
&w_1 = (x_0, x_1), w_2 = (x_1, x_0),\\
&w_3 = (x_0, x_2), w_4 = (x_1, x_1), w_5 = (x_2, x_0),\\
&w_6 = (x_0, x_3), w_7 = (x_1, x_2), w_8 = (x_2, x_1), w_9 = (w_3, w_0),\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}
$$

そして，量化記号をもたない論理式の列を以下のように構成する．

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &\equiv \theta(w_0; x_1, x_2),\\
\theta_1 &\equiv \theta(w_1; x_3, x_4) \wedge \theta_0,\\
&\ \vdots\\
\theta_n &\equiv \theta(w_n; x_{2n+1}, x_{2n+2}) \wedge \theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

以下の証明で，変数の並びに対して要請される性質は，つぎの 3 つだけであり，それらはただちに確かめられる（また，θ に含まれる変数の個数を変えても，以下の条件を成立するように θ_n を定めるのはやさしい）．

1. すべての変数の対は，ある θ_n において θ のセミコロン ; の左に現れる．
2. 各 θ_n に現れる自由変数は，$x_0, x_1, \ldots, x_{2n+2}$ のみである．
3. 各 θ_n において，変数 x_{2n+1} と x_{2n+2} は w_n や θ_{n-1} に含まれない．

最後に，

$$\varphi_n \equiv \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_{2n+2} \theta_n$$

とおくと，簡単な論理計算によって，つぎがいえる．

定理 VI.　任意の n について，$\varphi \to \varphi_n$ は証明可能．

証明の核心はここからである．θ_n は量化記号を含まないので，それに含まれる原子論理式 $P(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}})$ を原子命題 $p_{i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}}$ に置き換えれ

ば，命題論理の命題 θ_n^* が得られる．すると，命題論理の完全性定理から，θ_n^* は充足可能か反証可能である．

ケース 1．ある n について θ_n^* が反証可能，すなわち $\neg\theta_n^*$ が証明可能であるとする．このとき，述語論理の論理式 $\neg\theta_n$ は命題論理の公理と推論規則のみで証明可能である．したがって，$\forall x_0 \forall x_1 \ldots \forall x_{2n+2} \neg\theta_n$，つまり $\neg\varphi_n$ が述語論理において証明可能である．よって，定理 VI から，$\neg\varphi$ も証明可能であり，φ は反証可能である．

ケース 2．任意の n について θ_n^* が反証可能でない，すなわち命題論理の意味で充足可能であるとする．θ_n^* の構成から，θ_n^* を真にする真理関数は，すべての $m \leq n$ について θ_m^* を真にする．したがって，$\{\theta_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ のどんな有限部分集合も充足可能であり，命題論理のコンパクト性定理により，θ_n^* 全体を真にする真理関数 V が存在する．この V を使って，すべての n について θ_n を充足する構造 $\mathcal{M} = (M; P^{\mathcal{M}})$ を以下のように定義する．

$$M = \mathbb{N},$$
$$P^{\mathcal{M}}(i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}) \Longleftrightarrow V(p_{i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}}) = \mathrm{T}\ (\text{真}).$$

すると，x_i に $i \in \mathcal{M}$ を代入することで，すべての θ_n が $\mathcal{M}$ で充足されることをみるのは容易である．そして，この構造 $\mathcal{M}$ が，最初に与えられた ∀∃ 文 φ のモデルになることが確認できる．実際，任意に $i_0, i_1 \in \mathbb{N}$ を与えたとき，$w_n = (x_{i_0}, x_{i_1})$ となる n に対して，$\mathcal{M} \models \theta(i_0, i_1; 2n+1, 2n+2)$ であるから，$\mathcal{M} \models \forall y_0 \forall y_1 \exists z_0 \exists z_1 \theta(y_0, y_1; z_0, z_1)$ である．

以上から，定理 V が証明され，よって定理 I の証明が完結した．

付言すると，上で「命題論理のコンパクト性定理」と述べた部分を，ゲーデルはつぎのように説明している．各 n について，θ_n のモデル $\mathcal{M}_n$ で，$\mathcal{M}_{n-1}$ の拡大となるものが存在するから，「よく知られた議論」によってモデルの無限鎖 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \cdots$ が存在する．その極限をとれば，θ_n 全体のモデル $\mathcal{M}$ が構成される．ここで「よく知られた議論」というのはケーニヒの補題 (1926) を指すと思われるが，明示的な言及を避けたのは，これとつながりのある選択公理に対する懸念からであろうか．なお，博士論文では，「よく

知られた議論」とはせずにややくわしい説明を与えているが，やはりケーニヒの名は出していない．この辺りが，本論文で一番難しく，かつ真意のくみとりにくい箇所である．

さて，このあとゲーデルは主定理を 2 つの方向へ拡張する．定理 VII，VIII は，等号＝をもつ述語論理に拡張された定理 I，II である．証明は，本書の第 I 部と同様に，同値類をつくる作業を加えればよい．もう一つの拡張は，以下のように論理式の可算集合を扱うものである．

定理 IX.　論理式の可算無限集合は，全体が充足可能であるか，その有限個の連言（∧）で反証可能なものが存在する．

これによって，（可算言語における）1 階の無矛盾な理論は，つねにモデルをもつことがわかる．この論文では，この定理をつぎの定理（コンパクト性定理）の系として導いているが，博士論文では，コンパクト性定理は言及されていない．

定理 X.　論理式の可算無限集合が充足可能であるための必要十分条件は，すべての有限部分集合が充足可能なことである．

定理 X を証明するためには，定理 V，VI の証明に少し手を加えればよい．可算個の論理式それぞれに対する θ_n をつくって，それら全体をうまく一列に並べるだけである．最後に，ゲーデルは述語論理の公理の独立性についても述べているが，ここでは省略する．

0.3　完全性定理の周辺

ゲーデルが述語論理の完全性を証明したのと同じ頃，スコーレムとエルブランも独自に類似の結果を得ていた．3 人はそれぞれに研究の立場が異なるので，彼らの研究を単純に比較することは難しいが，スコーレムの仕事 (1923, 28) とエルブランの仕事 (1930) を合わせれば完全性定理の証明が，それも



図 0.5　スコーレム



図 0.6　エルブラン

ゲーデルやヘンキンの証明より情報量が多い形で導ける．つまり，後者では恒真式に対する証明の存在が主張されるだけなのに対し，スコーレム・エルブランの議論には証明の構成がより具体的な形で含まれている．もっともそのような解釈は 20 世紀後半のものである．

まず，彼ら以前の歴史を簡単に述べておく[5]．述語論理の創始者とされるフレーゲは，量化記号に対して，その変域を限定しないナイーブな意味付けしか与えなかった．一方，同時代のシュレーダーは具体的に与えた構造における文の充足可能性を研究し，その仕事は没後 (1902) にレーヴェンハイムに受け継がれた．そして，レーヴェンハイムは，モデル論の出発点となるつぎのような発見をした (1915)．領域 D で成り立つ命題（述語論理の文）は，可算の部分領域 $D' \subset D$ でも成り立つ．大変読みにくい論文であったが，その結果の革新性に目を付けたスコーレムが証明を修正したうえで，つぎのように一般化した (1920)．

可算個の公理からなる理論がモデルを持てば，可算領域のモデルを持つ．

これが，今日レーヴェンハイム・スコーレムの（下降）定理と呼ばれるものである．そして，これから導かれる実数論や集合論の可算モデルの存在は，ス

5)　よりくわしい解説は，本書第 III 部をみられたい．



図 0.7　レーヴェンハイム

コーレムのパラドクス (1923) として知られるようになる．

レーヴェンハイムが発見し，スコーレムが改良した証明の方法は，すべての論理式をある特定の形の論理式に変形して扱うものである．現代ではいわゆるスコーレム関数を用いた標準形が普及しているが，レーヴェンハイムの論文，スコーレムの 1920 年の論文や 1922 年の講演録（1923 年出版）には，形式的な対象物として関数（記号）は使われていない．前節のゲーデルの証明もそうであったように関数記号の代わりに関係記号を用いるのが当時のスタイルであった．なお，1928 年のスコーレムの講演録に，はじめてスコーレム関数らしきものが登場している．

スコーレム関数を用いた標準形の詳細については，第 I 部付録を参照のこと．ここでは，つぎの主張を天下りに仮定する．

定理 0.1　論理式 φ に対して，∀論理式 φ^S が存在して，φ が充足可能 $\Longleftrightarrow$ φ^S が充足可能．

φ^S を φ のスコーレム標準形 SNF (Skolem normal form) と呼ぶ．なお，論理式 φ と SNF 論理式 φ^S の同値性は一般にいえない．

スコーレムは，自らの証明 (1920) が選択公理を用いた超越的な論法になっていることを好まず，自然数をベースにしてモデルを具体的に構成する方法

を考案した (1923)．そして，その考えをさらに徹底して，後年エルブランモデルと呼ばれる構造を導入した (1928)．

ゲーデルとエルブランはともにスコーレムの 1920 年の論文を研究の出発点としながら，スコーレムの論文が載った北欧の学会講義録 (1923, 1928) を入手できず，少し遅れて同等なレベルに到達したとされる．のちにスコーレムの講義録の内容を知ったゲーデルは，彼の証明技法のほとんどをスコーレムが先に発見していたことを認めている．ちなみにスコーレムは 1887 年生まれで，1926 年に博士号をとるという晩稲であったのに対し，ゲーデルとエルブランは二人とも 1930 年に 20 代前半で学位をとった新時代の寵児である．なお，エルブランは 1931 年に登山中転落死した．

論理式 φ を構成する数学的記号をすべて含む言語の一つを $\mathcal{L}(\varphi)$ で表す．簡単のため，言語 $\mathcal{L}(\varphi)$ は，少なくとも一つの定数を含むものとする．そして，$\mathcal{L}(\varphi)$ の閉項（変数をもたない項）の全体 U を $\mathcal{L}(\varphi)$ のエルブラン領域と呼ぶ．等号 $=$ には特別な扱いが必要なので，ここでは等号が入らない論理を考える．

スコーレム (1928) とエルブラン (1930) がそれぞれ証明したことを現代風に述べれば以下のようになる．

定理 0.2（スコーレムの基本定理） 文 σ の SNFσ^S を $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ とする．このとき，$\neg\sigma$ が恒真であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\varphi)$ の閉項の組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\neg\varphi(\vec{t_1})\vee\cdots\vee\neg\varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーになることである．

定理 0.3（エルブランの基本定理） 文 σ の SNFσ^S を $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ とする．このとき，$\neg\sigma$ が証明可能であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\varphi)$ の閉項の組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\neg\varphi(\vec{t_1})\vee\cdots\vee\neg\varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーとなることである．

スコーレムとエルブランの基本定理を合わせれば，述語論理の完全性定理がただちに導ける．逆に，完全性定理を仮定すれば，2 つの基本定理は同じ主張になる．

つぎに，ヘンキンによる 2 階論理の完全性定理について，簡単に述べよう．通常の 2 階量化記号「すべての（ある）n 項関係 R について」にはメタな解釈が与えられ，1 階構造 $\mathcal{M}$ の領域 M における n 項関係全体 $\mathfrak{P}(M^n)$ を変域

とする．しかし，ヘンキンは，n 項関係の変域を $A_n \subseteq \mathfrak{P}(M^n)$ に制限した一般構造 (general structure)$\mathcal{M} \cup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ を導入した．そして，1 階論理の公理系を自然に拡張してできる 2 階論理の形式体系と，この構造のクラスの間で完全性定理が成り立つことを証明した．これは，2 階論理を，多領域の 1 階論理として扱うことに他ならず，完全性定理の他，コンパクト性定理やレーヴェンハイム・スコーレムの定理も成り立つ．しかし，このような 2 階論理に算術の公理を加えても，範疇的な理論にはならない．

他方，2 階量化を本来のメタ解釈にした場合，とくに 2 階の自然数論は統語論的に完全になるから，自然数および自然数の集合に関する多くの命題がその理論において表現されて，その上で決定可能になる．そこで表現される命題には，連続体仮説をはじめ，ZF 集合論から独立であるようなものもたくさん含むから，そのような命題を決定する形式体系を構築することは絶望的に困難である．クワインは，2 階論理は論理でなく，「ヒツジの衣をかぶった集合論である」といっている [クワイン 1972].

高階論理あるいは型理論についても，上で述べた 2 階論理に対するヘンキンの一般構造を拡張して，完全性定理を示すことができる．この他，無限論理，直観主義論理，多値論理，様相論理などさまざまな論理体系について，いろいろなシンタックスとセマンティクスが提案されており，それらをつなぐ役割として，それぞれの完全性定理が研究されている．とくに，様相論理と直観主義論理に対するクリプキの完全性定理は有名であり，第 III 部で説明される．

最後に付言すると，ゲーデルの完全性定理について重要な研究が，ヒルベルトとベルナイス [ヒルベルト・ベルナイス 1993] の第 2 巻にある．それによれば，1 階の無矛盾な理論は，算術的モデル，つまり自然数上で定義可能なモデルをもつ．彼らの議論は，ヘンキンの証明を用いれば，より簡明に見通せる．その後，モデルの複雑さについてはパトナムの分析（1957 など）を経て，現在では完全性定理を証明するには WKL_0 という体系が必要十分であるという結果に落ち着いている（本シリーズ第 3 巻所収「逆数学と 2 階算術」を参照）．

付録
集合の基本知識

1 集合と演算

集合の表し方には，その要素を列挙する外延的表記 $\{a, b, \ldots, z\}$ と，条件を記述する内包的表記 $\{x : P(x)\}$ がある．たとえば，$\{2, 4, 6, 8\}$ と $\{x : x$ は偶数かつ $0 < x < 10\}$ は同じ集合の別表現である．集合 A が要素 x をもつとき，$x \in A$ と記す．自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表し，$0 \in \mathbb{N}$ とする．

集合 A のすべての要素が集合 B にも属するとき，A は B の部分集合であるといい，$A \subset B$ と書く．とくに，空集合 $\emptyset$ はどんな集合の部分集合でもある．$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，2 つの集合 A, B は相等しいといい，$A = B$ と書く．$A \subset B$ だが $A \neq B$ のとき，A は B の真部分集合であるという[1)]．

集合 $A = \{x : P(x)\}, B = \{x : Q(x)\}$ が与えられたとき，それらから第 3 の集合をつくる操作として，和集合 $A \cup B = \{x : P(x)$ または $Q(x)\}$，交わり $A \cap B = \{x : P(x)$ かつ $Q(x)\}$，差集合 $A - B = \{x : P(x)$ だが $Q(x)$ でない $\}$ がある．全体集合 U が定まっているとき，$U - A$ を単に $\bar{A}$ と書いて，A の補集合という．集合 A が与えられたとき，その部分集合全体からなる集合 $\{X : X \subset A\}$ を A のベキ集合 (power set) と呼んで，$\mathcal{P}(A)$ または 2^A で表す．

---

1) 真部分集合を $A \subset B$ で表し，"$A \subset B$ または $A = B$" を $A \subseteq B$ と表記する方法もあるが，とくに断わらない限り，本書の $A \subset B$ は $A = B$ の場合を含む．

2　関係

n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が与えられたとき，それらから一つずつ要素 $a_i \in A_i$ を取り出して並べたもの $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を n 組 (n-tuple) といい，n 組全部の集まりを $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ で表す．$A_1 = \cdots = A_n = A$ のとき，$A_1 \times \cdots \times A_n$ を A^n と書く．A^n の部分集合 R は A 上の n 項関係 (relation) と呼ばれる．そして，$(x_1, \ldots, x_n) \in R$ を $R(x_1, \ldots, x_n)$ と表したり，とくに R が 2 項関係のときは $x_1 R x_2$ と書くこともある．

X 上の 2 項関係 R が同値関係 (equivalence relation) であるとは，以下が成り立つことをいう．任意の $x, y, z \in X$ について，

(1) xRx（反射律，reflexive law）.

(2) xRy ならば yRx（対称律，symmetric law）.

(3) xRy かつ yRz ならば，xRz（推移律，transitive law）.

2 項関係 R が X 上の半順序 (partial ordering) であるとは，上記の (1) と (3)，そして (2) の代わりに以下が成り立つことという．

(2′) xRy かつ yRx ならば，$x = y$（反対称律，antisymmetric law）.

半順序であって，さらに以下の性質をもつものを全順序 (total ordering)，あるいは線形順序 (linear ordering) ともいう．任意の x, y について，

(4) xRy または yRx（比較可能律，comparability law）.

等号なし不等号 $x < y$ については，それに等号を加えると半（全）順序になる場合に，等号なしのままで半（全）順序と呼ぶことが多い．

3　関係

集合 X の各要素に集合 Y の要素を対応させる関数を $f : X \to Y$ で表す．そして，X を f の定義域 dom(f)，$f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ を f の値域 range(f) という．関数 $f : X \to Y$ に対して，$X \times Y$ の部分集合

$\{(x, f(x)) : x \in X\}$ を f のグラフ (graph) という．逆に，$X \times Y$ の部分集合 F が与えられ，各 $x \in X$ に対し $(x, y) \in F$ となる y がちょうど一つ定まるなら，F をグラフとする関数が唯一つ存在する．

全体集合 U を固定する．集合 $A \subset U$ に対して，

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ のとき} \\ 0, & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される関数 $\chi_A : U \to \{0, 1\}$ を A の特性関数 (characteristic function) という．逆に，$f : U \to \{0, 1\}$ が与えられたとき，f を特性関数とするような集合が唯一つ定まる．

4　濃度

二つの集合 A，B の各要素の間に 1 対 1 対応があれば，A と B は同じ濃度 (cardinality) をもつという．ある自然数 n が存在し，集合 A と集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ が同じ濃度をもつとき，A は有限集合であるといい，有限でない集合を無限集合と呼ぶ．集合 A が自然数全体 $\mathbb{N}$ と同じ濃度をもつとき，A の濃度は $\aleph_0$（アレフ・ゼロ）であるという．有限集合と濃度 $\aleph_0$ の集合を合わせて（高々）可算集合と呼び，それ以外を非可算集合と呼ぶ．$\mathbb{N}$ のベキ集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は非可算である．

参考文献

本序の執筆に際して筆者が参考にした主な資料と，読者に本書とあわせて読んでいただきたい教科書類を簡単に紹介しておこう．

[デデキント 1961] デーデキント，河野伊三郎訳『数について』岩波文庫 (1961). 原著：Dedekind, J., “Stetichkeit und irrationale Zahlen” (1872) および “Was sind und was sollen die Zahlen?” (1887, 1893, 1911). 現代数学における数の概念を確定させた不朽の名著．

[Eklund 1996] Eklund, M., “On how logic became first-order”, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1-2 (1996), 147–167. 20 世紀前半，高階論理から 1 階論理へロジシャンの関心が移った原因を探究する．

[Ewald] Ewald, W. B., *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917–1933*, Springer (2006). ヒルベルトの 1917–18 年の講義は，10 年後に公刊される [ヒルベルト・アッケルマン 1954] の本の内容をほとんど含んでいた．ヒルベルトの洞察力と先見性を実証する貴重な資料．

[Feferman 1986] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works*, Oxford Univ. Press, vol.I (1986). ゲーデルの博士論文と，完全性定理に関する発表論文を英独対訳で所収．解説も充実している．

[Gödel 1930] Gödel, K., “Die Vollständigkeit der Axiom des logischen Funktionenkalkuls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **37**, 349–360 (1930).

[Henkin 1996] Henkin, L., “The discovery of my completess proofs”, *The Bulletin of Symbolic Logic*, 2-2 (1996), 127–158. 完全性定理の新しい証明を含んだ博士論文を書き上げるまでの経緯をヘンキン本人が語る．

[ヒルベルト 1969] ヒルベルト，中村幸四郎訳『幾何学基礎論』弘文堂書房，改訂版 (1969). 初版 (1943). 文庫版：ちくま学芸文庫 (2005). 寺阪英孝・大西正男訳『幾何学の基礎/エルランゲン・プログラム』(1970). ヒルベルトの公理論の原点となる名著．付録に，論文「数の概念について」などを所収．

[ヒルベルト・アッケルマン 1954] ヒルベルト・アッケルマン，伊藤誠訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書 (1954). 原著：Hilbert, D. and Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, 第 3 版，Springer (1949). 第 2 版 (1938) の英訳 *Principles of Mathematical Logic*, AMS Chelsea (1950) や第 6 版 (1972) の和訳 (1974) もある．1928 年の初版は，現代論理学の出発点となる金字塔．1 階論理の完全性がここで問題提起された．

[ヒルベルト・ベルナイス 1993] ヒルベルト・ベルナイス，吉田夏彦・渕野昌抄訳『数学の基礎』(シュプリンガー数学クラシックス) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993). 原著：Hilbert, D. and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik I, II*, 2nd ed., Springer (1934/1968, 1939/1970).「ザ・数学基礎論」というべき古典．ゲーデルの完全性定理，不完全性定理についての詳細な分析を含む．

[廣瀬・横田 1985] 廣瀬健・横田一正『ゲーデルの世界——完全性定理と不完全性定理』海鳴社 (1985)：ゲーデルの 2 つの論文の全訳が付けられている．これらの定理や背景の説明もコンパクトでわかりやすい．

[Mancosu 1988] Mancosu, P., *From Brouwer to Hilbert*, Oxford (1998). ブラウワー，ヒルベルト，ベルナイスらの論争的論文や講演録の英訳を収録し，解説している．

[野本 2002] フレーゲ，野本和幸（編）『書簡集付「日記」』フレーゲ著作集 6，勁草書房 (2002). フッサール，ヒルベルト，ラッセルらとフレーゲの往復書簡集．

[野本・飯田 2001] フレーゲ，野本和幸・飯田隆（編）『数学論集』フレーゲ著作集 5，勁草書房 (2001). 数学の基礎についてのフレーゲの論説集．ヒルベルトとの論争から生まれた論文「幾何学の基礎について」を含む．

[クワイン 1972] クワイン，山下正男訳『論理学の哲学』培風館 (1972). 原著：Quine, W.V.O., *Philosophy of Logic*, Prentice-Hall (1970). クワイン独特のエスプリを散りばめ，ロジックの現状を批判的に考察する．入門書のようでありながら，なかなか難しい．

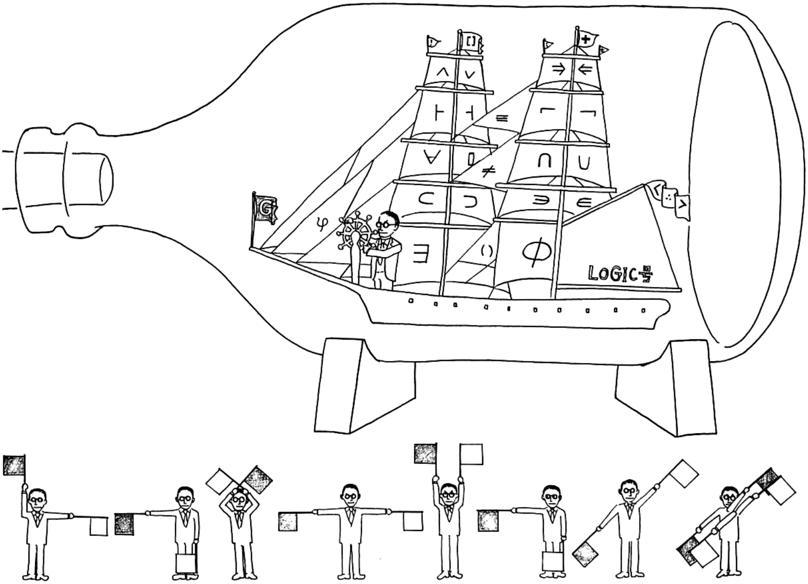
[van Heijenoort 1967] van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard Univ. Press (1967). スコーレム，ヒルベルト，ゲーデル，エルブランらの主要論文の英訳を収録．

[ワン 1995] ハオ・ワン，土屋俊・戸田山和久訳『ゲーデル再考　人と哲学』産業図書 (1995). 原著：Wang, H., *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass. (1987). 晩年までゲーデルと交流をもっていたワンによる本格的ゲーデル伝．ゲーデルの業績の分析もくわしい．

I

述語論理入門

田中一之



第I部の目的は，現代ロジックのスタンダードとされる1階述語論理について，ゲーデルの完全性定理を中心的題材としつつ，その他の基本事実や重要概念もあわせて総合的に理解することにある．

20世紀の初め，形式論理の主役は疑いなく型理論であった．「1階」という言葉自体は，すでに19世紀末にパースが使っていたが，その重要性を数学の基礎付けの観点から強く意識したのはヒルベルトである．彼は，1917–18年の講義において，ホワイトヘッド・ラッセルの型理論をもとに，1階述語論理の公理系を規定している．そして，アッケルマンとの共著書 (1928) [ヒルベルト・アッケルマン 1954] において，その公理系が完全であるか否かを問うた．それに肯定的な解決を与えたのが，ゲーデルの完全性定理である．すなわち，1階述語論理において，

恒真命題はすべて証明可能である

ことが示された．

実際にゲーデルが証明したのはこの対偶で，「証明可能でない命題には，反例のモデルが存在する」ことであった．しかし，彼の証明においては，反例の構造がみえにくく，より一般的な状況で具体的にモデルを構成してみせたのは，プリンストン大学のチャーチの学生だったヘンキンである (1949)．その後，ヘンキンはタルスキに招かれ，アメリカ西海岸のバークレーにモデル理論の研究グループを形成する一翼を担った．

形式体系や証明可能性の概念についても，ゲーデル以降，急速かつ多様な進展があった．1934年，ヒルベルトの助手ゲンツェンが，新しい形の演繹体系 LK (logistischer kalkül) を導入し，「証明」の構造的研究の道を拓いた．そして，1950年代には，ベート，ヒンティカ，シュッテらが，ゲンツェンの体系とヘンキンの証明を結びつけて，タブロー法を開発し，証明とモデルの概念をさらに見通しよく結びつけた．この議論はスマリヤンの名著『1階論理』(1968) において整理され，そして深化した．

私は，学生時代（1970年代後半）に，恩師の故石本新東京工業大学教授（当時）からスマリヤンの本をテキストにした個人指導を数回にわたって受けたことがある．不肖ながらそのときも随分まどろっこしい議論に感じたもの

だが，いま読み返しても独特な定義用語が多くて，メイン・ディッシュの「述語論理の基本定理」(以下，「基本定理」ともいう）に到達する前に満腹になってしまうのである．なお，この定理は，図式的に示せば，

$$\text{述語論理の恒真性} = \text{トートロジー} + \text{量化公理}$$

というものである．タブロー法については，その後いろいろ読みやすい教科書もでているが，「基本定理」やそれを使った完全性定理の証明まで書かれた入門書は，私が知る限りまだないようである．そこで，本シリーズが企画された際に，私自身でこの辺りをできるだけ分かりやすく書き下してみようと思い立ったしだいである．

完全性定理の結果を技術的に導くだけなら，もっと簡明な議論も可能である．しかし，われわれの目的は，完全性定理を通して，1 階述語論理そのものを深く理解することにある．「基本定理」のエッセンスは，ゲーデルのオリジナルな証明にすでに含まれているともいえるが，命題論理と述語論理の類似性と相違性を顕在化させ，さらに両者をつなぐ「ケーニヒの補題」(1926) の役割を明らかにしている観点から，この定理はまさに「基本定理」の名にふさわしいものである．

本書では，「1 階述語論理」を単に「述語論理」と呼んでいる．最近では「1 階論理」と呼ぶほうが一般的だが，「命題論理」と並べた場合「述語論理」のほうが語呂がいいからである．なお，恒真の概念は，命題論理と述語論理のそれぞれに定義されるが，とくに命題論理の恒真（命題）はトートロジーとも呼ばれる．述語論理の恒真性は，トートロジーを自明に含んでいるが，それとの差分を正確に記述したのが，「基本定理」である．

第 I 部の内容を簡単に示しておく．第 1 章では，「論理」を厳密に議論するうえで不可欠な再帰的定義と帰納法について解説し，つぎに形式論理の数学的骨組みとなる木構造に関する諸概念について述べる．とくに，無限木に関する「ケーニヒの補題」は，ゲーデルの完全性定理の数学的エッセンスとみなすことができる．第 2 章では，命題論理のトートロジーを定義し，その判定法としてタブロー法を導入する．その後，命題論理の演繹体系を与え，それに対する完全性定理を証明する．第 3 章では，タブロー法を述語論理に拡

張し，命題論理と述語論理をつなぐ「述語論理の基本定理」を証明する．それから，ヒルベルト流演繹体系を導入し，「ゲーデルの完全性定理」を証明する．第 4 章では，ゲンツェンの演繹体系 LK を導入し，「ゲンツェンの主定理」を用いて述語論理の基本的性質を証明する．また，関数記号や等号をもつ述語論理についても考察する．付録では，完全性定理を別の角度から研究したスコーレムとエルブランの仕事を紹介する．

第1章
ケーニヒの補題

ロジックにおける議論の際立った特徴は，再帰的定義と「帰納法による証明」の多用である．ほとんどの概念は再帰的に定義され，ほとんどの定理は帰納法によって証明されるといってもよい．そこで，本章ではまずこれらの常套手段について解説する．つぎに，形式論理の数学的骨組みとなる「木」とそれに関する基本概念を導入する．そして，最後に，完全性定理と深く結びついたケーニヒの補題を証明する．本章の議論になじみにくければ，次章から読み始めて，必要に応じて戻ってこられてもよいと思う．

1.1　再帰的定義と帰納法

集合や関数を定義する便利な方法に，再帰法 (recursion) がある．高校数学に頻出する漸化式（隣接項間の関係）による数列の定義は再帰法の一種である．それ以外にも用途は広い．

本書に登場する再帰的定義の代表的な形はつぎのようなものである．

(1) 0 と 1 は項である．

(2) s と t が項ならば，$(s+t)$ は項である．

(3) (1)，(2) から有限ステップで得られるものだけが項である．

これは，「項」と呼ぶ記号列のパターンを定義している．この定義に従うと，$((1+0)+1)$ は項であるが，$(1+0)+1$ は項でない．「再帰的」という名の所以は，条件 (2) の前提に定義途中の「項」が含まれていることにあるが，循環論法になっているわけではない．

上の定義は，項の集合 Term の定義として書き直すことができる．

(1) $0 \in$Term かつ $1 \in$Term.

(2) $s \in$Term かつ $t \in$Term ならば，$(s+t) \in$Term.

(3) (1)，(2) から有限ステップで得られるものだけが Term に属する．

つまり，Term は $0, 1$ を含み（条件 1），(　+　) の演算で閉じた（条件 2），最小の集合である（条件 3）．(3) の文言は省略することも多い．

再帰的に定義されたものに関して，それらがある性質をもつことを示すために用いられる有力な手段が帰納法 (induction) である．なかでも，自然数に関する性質を証明する際に用いられる帰納法は，数学的帰納法と呼ばれる．それによると，たとえば，すべての自然数 n が性質 $P(n)$ を満たすことを証明する場合，

(1) $P(0)$ が成り立つ．

(2) $P(n)$ が成り立てば，$P(n+1)$ が成り立つ．

を示せばよい．実際，性質 P を満たす自然数の集合 $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ を考えると，上の条件から，これは 0 を含み，+1 に関して閉じている．他方，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は，0 を含み，+1 に関して閉じた最小の集合と定義できるから，$\mathbb{N}$ は A に含まれる．つまり，両者は一致する．したがって，すべての自然数 n が性質 $P(n)$ を満たすことになる．

上で定義した「項」に関する簡単な事実として，すべての項は左カッコ “(” と右カッコ “)” を同数個含むことを証明してみよう．

(1) 0 と 1 については，カッコがないので明らか．

(2) 項 s が “(” と “)” を m 個ずつ，項 t が “(” と “)” を n 個ずつ含むとしよう．このとき，項 $(s+t)$ は “(” と “)” を $m+n+1$ 個ずつ含む．

このことから，すべての項は “(” と “)” を同数個含むことがいえる．なぜなら，“(” と “)” を同数個含む項の集合は，0 と 1 を含み，$(\quad+\quad)$ に関して閉じているから，限定条件によって項全体に一致する．この証明法を，項の構成に関する帰納法とか，項の複雑さに関する帰納法と呼ぶことがある．

1.2　木について

ロジックにおける形式的な対象は，たいがい木構造をもっている．たとえば，項 $(((1+0)+1)+(0+1))$ の構成の様子は，以下のような木構造で表せる．

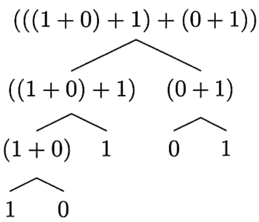


図 1.1　項 $(((1+0)+1)+(0+1))$ の木構造

木構造とは，木の各節点にラベルが付されたデータ構造のことである．上図の木は逆さづりに書かれているが，下から上に広がるように書く場合（例：LK の導出木）や，横に寝かせて書く場合もある．

項は必ず有限木で表現されるが，たとえば $(1+(0+(1+(0+(1+\cdots$ のような無限記号列に対しても木構造による表現を導入しておくと便利である．

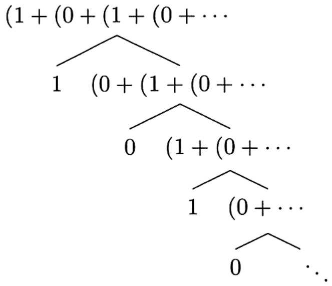


図 1.2　$(1+(0+(1+\cdots$ の木構造

これらの例をふまえて，木 (tree) についての概念と用語を改めて整理しておこう．数学では，木とは，最小元をもつ半順序集合 $(T, \leq)$ で，任意の $p \in T$ に対して $\{q : q \leq p\}$ が有限の全順序（もしくは，整列順序）になるものと定めるのがふつうである．しかし，ここではもう少し具体的な表現を伴った定義を用いる．まず，記号の集合 Ω を与え，その記号からつくられる有限列の全体を Ω^* とおく（たとえば，$\Omega = \{0, 1\}$ として，0^* は 0 と 1 からなる有限列全体である）．とくに空列を $\emptyset$ で表す．そして，Ω^* 上の 2 項関係 $\leq$ をつぎのように定める：

$$v \leq w \Longleftrightarrow v \text{ の後に適当な記号列をつなげると } w \text{ ができる.}$$

最後に，木とは，Ω^* の部分集合 T であって，

$$v \leq w \text{ かつ } w \in T \text{ ならば，} v \in T$$

となるものである．

たとえば，図 1.1 の骨格の木を集合で表してみると，

$$T = \{\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001\}$$

となる．これを図示すると，図 1.3 のようになる．

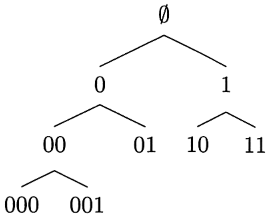


図 1.3　図 1.1 の木

また，図 1.2 の木を集合で表してみると，

$$T = \{\emptyset, 0, 1, 10, 11, 110, 111, 1110, \dots\}$$

となる．これを図示すると，図 1.4 のようになる．

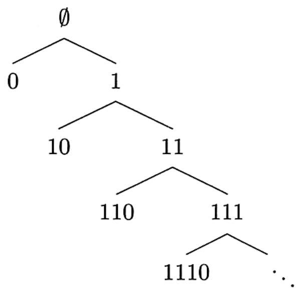


図 1.4　図 1.2 の木

上に示した 2 つの木は，ラベルが付いた木構造のようにもみえるが，ラベルの 2 進列は位置を表す符合にすぎず，あえて書かなくてもいいものである．

木 T の要素は，その木の節点 (node) とも呼ばれる．とくに，最小元 $\emptyset$ をその木の根 (root) と呼び，極大元（それより大きな元がないもの）を葉 (leaf) と呼ぶ．木のどの節点 w からも，上に溯る道は一意に決まっており，有限ステップ（w の長さ）で根に到達する．しかし，下る道には枝分かれがあり，下って行って有限で止まる（葉に到達する）とは限らない．根から一つの葉

までの道筋，あるいは根から無限にのびる道筋を枝 (branch) または道 (path) と呼ぶ．数学的に述べれば，木の部分集合が枝であるための必要十分条件は極大全順序集合になることである．図 1.2 の木で考えると，枝には以下のものがある：

$$\{\emptyset, 0\}$$
$$\{\emptyset, 1, 10\}$$
$$\{\emptyset, 1, 11, 110\}$$
$$\{\emptyset, 1, 11, 111, 1110\}$$
$$\vdots$$
$$\{\emptyset, 1, 11, 111, 111, 1111, \ldots\}$$

無限木（無限の節点からなる木）には，無限の枝をもつものと，もたないものがある．下図は，無限枝をもたない無限木の例である．

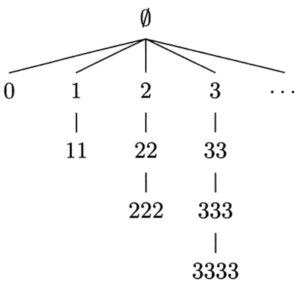


図 1.5　無限枝をもたない無限木の例

木 $(T, \leq)$ において，各節点 $x \in T$ の子 y（すなわち，$x < y$ かつ $\neg\exists z(x < z < y)$）の数が有限であれば，その木は有限分岐であるという．図 1.5 の木は，根で無限の分岐があり，有限分岐ではない．

最後に，完全性定理の証明の要になる重要定理を述べる．

定理 1.1（ケーニヒの補題）　有限分岐の無限木には，無限長の枝が存在する．

証明　$(T, \leq)$ を有限分岐の無限木とする．最初に，

$$T' = \{x \in T : \{y \in T : x < y\} \text{ は無限 }\}$$

とおく．T は無限個の節点をもち，それらはすべて T の根 $\emptyset$ より大きいか等しいので，$\emptyset$ は T' に属する．いま，$x \in T'$ とする．T は有限分岐木だから x の子は有限であり，それらを $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ とおく．$x < z$ であれば，ある $i < n$ に対して $y_i \leq z$ となることが木の性質からいえる．したがって，$\{y \in T : x < y\}$ は，n 個の集合 $\{z \in T : y_i \leq z\}$ $(i < n)$ に分割される．$\{y \in T : x < y\}$ は無限であるから，少なくとも一つの $i < n$ に対して $\{z \in T : y_i \leq z\}$ は無限であり，そのとき $y_i \in T'$ となる．すなわち，T' の節点の子の一つは T' に属する．よって，T の根 $\emptyset$ から始め，T' のなかで無限に子孫をつないでいくことができる．それが，T の無限の枝になる．　■

上の補題は，1926 年に D. ケーニヒ（父も数学者で集合論関係の仕事がある）によって著された論文にある．ゲーデルは，完全性定理の証明のなかで，ケーニヒの名前に言及せず，これを周知の論法として用いている．

第2章

命題論理

本章では，命題の論理的つながりを主題とする命題論理 (propositional logic) について学ぶ．命題論理では「命題」が単位であり，原子命題をさらに「主語＋述語」のように分解して調べるのが，次章の述語論理 (predicate logic) である．命題論理の演繹体系に関する性質（完全性，独立性）はヒルベルトがすでに 1917–18 年の講義で扱っていたが，公にはポスト (1922) とベルナイス (1926) によって証明され，それらの解説はヒルベルトとアッケルマンの共著書 (1928)[ヒルベルト・アッケルマン 1954] に載った．その本で，この結果を述語論理に拡張できるかという問題が提起され，それに答えたのがゲーデルである．ゲーデルの論法は，簡単にいえば，述語論理を命題論理に還元させるものであるから，まず命題論理について理解しておくことが肝要である．

2.1 真理値とトートロジー

命題論理の形式的扱いでは，命題が記述する内容を捨て去り，それを単に真か偽の値をとる記号とみなすことにより，命題相互の論理関係を明確化する．

命題の基本単位は，原子命題である．

定義 2.1 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ を原子命題 (atomic proposition) とする．

原子命題が何を記述しているのかをわれわれは問わないし，いまここではこれらの真偽を決定するような前提（公理）は何も与えられていないものとする．つまり，すべての原子命題は，それぞれ独立に真にも偽にもなるものとしておく．たとえば，$p_0 =$「人間の本性は善である」として，それが真か偽かを議論するのではなく，「p_0 ならば p_0」が p_0 の内容あるいは真偽によらず真になる，といったことを問題にしたい．

一般の命題は，いくつかの原子命題をつぎの 4 つの命題結合記号でつないでつくられる：

$$\neg\ (\cdots \text{でない}), \quad \wedge\ (\text{かつ}), \quad \vee\ (\text{または}), \quad \rightarrow\ (\text{ならば}).$$

命題の正確な定義は，再帰法を使ってつぎのように表される．なお，本章では，命題を $A, B, C, \ldots$ で表す．

定義 2.2 命題 (proposition) は，つぎのように定義される．

(1) 原子命題は命題である．

(2) A と B が命題であれば，$\neg(A)$，$(A) \wedge (B)$，$(A) \vee (B)$，$(A) \rightarrow (B)$ も命題である．

たとえば，$(\neg(p_1)) \wedge ((p_3) \rightarrow ((p_1) \vee (p_2)))$ は命題である．誤読が生じない程度に適当にカッコを省略し，$\neg p_1 \wedge (p_3 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$ などと書くことも許す．カッコの省略法については，厳密にいえば命題の結合の強さを $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$ の順などと定めて規則化できるが，ここでは慣用に従うくらいに留めておこう．

原子命題の真偽は自由に選択できても，一般の命題の真偽はそうではない．たとえば，$A \vee \neg A$ は，A の真偽によらずつねに真である．この状況について，もう少しくわしくみていこう．

命題 A が真のとき A は真理値 T（true の意）をもつといい，A が偽のときは真理値 F（false の意）をもつという．原子命題については，T，F を自由に割り当てられると約束した．複合命題の真理値は，その構成要素の原子命題の真理値を決めることで一意に定まる．

定義 2.3　原子命題に真理値を割り当てる関数 v が与えられたとき，以下の条件によってすべての命題に真理値を割り当てる関数 V が一意に定まる．この関数 V を真理値関数 (truth-value function) と呼ぶ．

(1) A が原子命題のとき，$V(A) = v(A)$.

(2a) $V(\neg A) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A) = \mathrm{F}$.

(2b) $V(A \wedge B) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A) = \mathrm{T}$ かつ $V(B) = \mathrm{T}$.

(2c) $V(A \vee B) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A) = \mathrm{T}$ または $V(B) = \mathrm{T}$.

(2d) $V(A \to B) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A) = \mathrm{F}$ または $V(B) = \mathrm{T}$.

真理値関数 V の存在およびその一意性を示すには，各命題が唯一つの真理値をもつことを「命題」の構成に関する帰納法によって証明すればよい．

命題 A, B に対する真理値 T, F の割り当て（4 通り）に対して，$\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B$ の真理値は以下の表にまとめられる．

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

定義 2.4　命題 A がどんな真理値関数 V に対しても $V(A) = \mathrm{T}$ となる場合，そのような命題 A をトートロジー (tautology) または恒真 (valid) といい，A がトートロジーであることを $\models A$ と書く．

例 2.5　任意の命題 A, B について，$A \to (B \to A)$ はトートロジーである．なぜなら，もしもある真理値関数 V に対して $V(A \to (B \to A)) = \mathrm{F}$ だとすると，上の条件 (2d) より，$V(A) = \mathrm{T}$ かつ $V(B \to A) = \mathrm{F}$ である．さらに $V(B \to A) = \mathrm{F}$ に対して再び条件 (2d) を適用すれば，$V(B) = \mathrm{T}$ かつ $V(A) = \mathrm{F}$ となるが，$V(A)$ が同時に T かつ F となることはあり得ないので，矛盾である．

つぎに，真理値表を用いて，命題の恒真性を確かめてみよう．

例 2.6 $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$ は恒真である．命題 A, B, C に真理値 T, F を割り当てる仕方は 8 通りある．下の表では，まず $A \vee B$, $\neg B \vee C$, $A \vee C$ の対応する真理値がそれぞれの命題の下に書かれている．さらに，$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$ の真理値は $\wedge$ の記号の下，そして全体の真理値は $\to$ の下に書かれている．ご覧のように，全体はつねに T であるから，$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$ は恒真である．

A	B	C	$(A \vee B)$	$\wedge$	$(\neg B \vee C)$	$\to$	$(A \vee C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T	F

この程度の大きさの命題に対してなら，真理値表による方法は簡単でわかりやすい．しかし，この 2，3 倍の長さの命題になると，真理値表は大きくなりすぎて人力で作成するのは容易ではなく，また表を埋めるために無駄な値をたくさん計算することになる．では，大きな命題をどう扱えばいいだろうか？　基本的には例 2.5 のような背理法的な議論が有効である．しかし，それもうまくやらないと議論が空回りしてしまう危険性があり，そのアルゴリズムを整理して形式化したのがタブロー法である．

2.2 タブロー法

最初に，真理値関数に関連した基本的概念を定義しておこう．

定義 2.7 命題 A が命題の集合 Σ のトートロジー的帰結 (tautological consequence) であるとは，Σ に属するすべての命題に値 T を割り当てるような任意の真理値関数が命題 A にも値 T を割り当てるときをいう．このとき，$\Sigma \models A$ と書く．

定義 2.8 命題の集合 Σ が充足可能 (satisfiable) であるとは，Σ に属するすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数が存在するときをいう．そうでないとき，Σ は充足不能 (unsatisfiable) という．

これらの定義から，つぎは容易にわかる．

補題 2.9 $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B \iff \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B \iff \Gamma = \{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ は充足不能．

上の補題の特別な場合として，B が恒真であることと，$\{\neg B\}$ が充足不能であることは同値である．したがって，充足不能性を調べることで，恒真性のチェックが可能になる．たとえば，$(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \to (A \vee C)$ の恒真性は，$\{A \vee B, \neg B \vee C, \neg(A \vee C)\}$ の充足不能性に置き換えられ，そのチェックを効率よく行うのがタブロー法である．

まず，$\{A \vee B, \neg B \vee C, \neg(A \vee C)\}$ の充足不能性を調べる方法を，直観的に述べておこう．すなわち，$A \vee B$ かつ $\neg B \vee C$ かつ $\neg(A \vee C)$ という状況が実現できないことをいう．最初に，$A \vee B$ であれば，A か B は成り立つから，それぞれの可能性を別々に考えて，どちらも充足不能であれば，全体も充足不能になる．同様に，$\neg B \vee C$ からも 2 つの可能性 $\neg B, C$ が生じる．最後に，$\neg(A \vee C)$ であるが，これは $\neg A$ かつ $\neg C$ であって，可能性は分かれない．

状況の分岐を木構造で表現すると，以下のようである．

$$
\begin{array}{c}
A \lor B \\ \hline
\neg B \lor C \\ \hline
\neg (A \lor C) \\ \hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
A \\ \hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg B \\ \hline \neg A \\ \hline \neg C \\ \hline \times \end{array} &
\begin{array}{c} C \\ \hline \neg A \\ \hline \neg C \\ \hline \times \end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
B \\ \hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg B \\ \hline \neg A \\ \hline \neg C \\ \hline \times \end{array} &
\begin{array}{c} C \\ \hline \neg A \\ \hline \neg C \\ \hline \times \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

$A \lor B$ を根として，4 つの枝が下に伸びている．それぞれの枝が，起こりうるシナリオを表しているが，どの枝においてもある命題とその否定（たとえば，一番左の枝には A と $\neg A$）が同時に現れるので，その枝のシナリオは実現できない．つまり，$\{A \lor B, \neg B \lor C, \neg(A \lor C)\}$ は充足不能である．

このような木構造，あるいはそれをつくっていく途中段階の木構造をタブロー (tableau，複数形は tableaux) と呼ぶ．これから述べる規則に従って，タブローを徐々に書き換えていき，最終的に得られるタブローの形により，与えられた命題の恒真性が判定できるのである．

定義 2.10 命題論理のタブロー規則 (tableau rule) は，以下の 7 つである．

$$
\begin{array}{c} A \land B \\ \hline A \\ B \end{array}, \qquad
\begin{array}{c} A \lor B \\ \hline A \quad\quad B \end{array}, \qquad
\begin{array}{c} A \to B \\ \hline \neg A \quad\quad B \end{array},
$$

$$
\begin{array}{c} \neg(A \land B) \\ \hline \neg A \quad\quad \neg B \end{array}, \qquad
\begin{array}{c} \neg(A \lor B) \\ \hline \neg A \\ \neg B \end{array}, \qquad
\begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ \hline A \\ \neg B \end{array}, \qquad
\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \hline A \end{array}
$$

この 7 つの規則によって，タブローが生成される．まず，Γ を命題の有限集合とする（無限集合の場合は次節で扱う）．Γ に対するタブローの列は以下のように生成される．

最初に，Γ の要素を

$$A_1$$
$$\vdots$$
$$A_n$$

と縦に並べる．これも A_1 を根とする一つの木構造であり，Γ に対する一つのタブローである．あとは，各節点の命題にタブロー規則を適用することにより，木構造を下向きに成長させていく．そして，ある枝において，ある命題 A とその否定 $\neg A$ がともに現れたならば，その枝の下に

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \hline \times\end{array}$$

を付加し，その枝は閉じている (closed) と呼ぶ．閉じていない枝の途中に，まだタブロー規則を適用していない命題があれば，その命題の形に応じたタブロー規則を用いて，その枝の先を以下のように伸ばす．たとえば，$A \wedge B$ に対して規則を適用した場合，A と B を直列につないで枝の先に付け加える．また，$A \vee B$ に対しては，枝の先を 2 つに分けて一方に A を，他方に B を付加する．他の規則についても同様である．

タブロー規則の適用を過不足なく機械的に行うために，ある命題にタブロー規則を適用する際には，それを含む すべての 閉じていない枝を同じ規則によって一斉に伸ばして，その命題には分解済みを表すチェック記号 ✓ を付けて，重複適用を避ける方法がある．しかし，ある形のタブローを効率よく構成するためには，「すべての 閉じていない枝」を一斉に伸ばすよりも，「いくつかの 閉じていない枝」を伸ばしておくほうが便利なこともある．このような適用の仕方を不完全適用と呼ぶことにする．

枝が開いている (open) とは，それが閉じておらず，分解可能な命題はすでに分解してあるものをいう．すべての枝が閉じているか開いているようなタブローを終タブロー (end tableau) と呼ぶ．とくに，すべての枝が閉じている終タブローを閉タブロー (closed tableau) と呼ぶ．

以上の内容をもう一度，定義としてまとめておく．

定義 2.11　Γ を命題の有限集合とする．Γ に対する（命題論理）タブローは，

以下のように定義される．

(1) Γ の要素を縦に並べたものは，(初期）タブローである．

(2) 与えられたタブローにおいて，ある閉じていない枝に分解可能な命題が現れていれば，その形に対応したタブロー規則を適用して，その枝の先にタブロー規則の下式を加えてできるものもタブローである．

ただし，枝が閉じているとは，ある命題 A とその否定 $\neg A$ がともに現れることをいう．枝が開いているとは，それが閉じておらず，分解可能な命題はすでに分解してあるものをいう．すべての枝が閉じているか開いているようなタブローを終タブローと呼び，すべての枝が閉じている終タブローを閉タブローと呼ぶ．

タブローのなかのある命題（チェック記号 ✓ なし）に注目し，それを含むすべての 閉じていない枝を同じ規則によって一斉に伸ばした場合，その命題にチェック記号 ✓ を付ける．この操作を 1 回の作業とみなせば，タブローの構成は，Γ に含まれる各命題と，そのすべての部分命題に対し，高々1 回の作業を行うだけであるから，必ず有限回で終タブローが得られる．しかし，同じ Γ に対する終タブローは複数存在し得る．

例 2.12　$\Gamma = \{p_0 \wedge p_1, \neg p_0 \vee \neg p_1\}$ に対する二つの閉タブローを示す．

$$
\begin{array}{c}
p_0 \wedge p_1 \quad \checkmark \\
\hline
\neg p_0 \vee \neg p_1 \quad \checkmark \\
\hline
p_0 \\
p_1 \\
\hline
\begin{array}{cc}
\neg p_0 & \neg p_1 \\
\hline
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
p_0 \wedge p_1 \quad \checkmark \\
\hline
\neg p_0 \vee \neg p_1 \quad \checkmark \\
\hline
\begin{array}{cc}
\neg p_0 & \neg p_1 \\
\hline
p_0 & p_0 \\
\hline
p_1 & p_1 \\
\hline
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

例 2.13 本章の最初に扱った例であるが，$\Gamma = \{A \vee B, \neg B \vee C, \neg(A \vee C)\}$ に対しては，規則を完全に適応せずに下のような閉タブローがつくれる．

$$
\begin{array}{c}
A \vee B \quad \checkmark \\
\hline
\neg B \vee C \quad \text{不完全適用} \\
\hline
\neg(A \vee C) \quad \checkmark \\
\hline
\begin{array}{ccc}
A & \multicolumn{2}{c}{B} \\
\hline
\neg A & \neg B & C \\
\hline
\neg C & \times & \neg A \\
\hline
\times & & \neg C \\
\hline
 & & \times
\end{array}
\end{array}
$$

例 2.14 $\Gamma = \{p_0 \wedge p_1, \neg p_0 \vee p_2\}$ に対する終タブローの一つを示す．右の枝が開いている．

$$
\begin{array}{c}
p_0 \wedge p_1 \quad \checkmark \\
\hline
\neg p_0 \vee p_2 \quad \checkmark \\
\hline
p_0 \\
\hline
p_1 \\
\hline
\begin{array}{cc}
\neg p_0 & p_2 \\
\hline
\times &
\end{array}
\end{array}
$$

例 2.12 と例 2.14 は具体的なタブローを表示しているが，例 2.13 はタブローの図式（A, B, C は任意の命題を表す）である．例 2.14 のように枝が開いているタブローを示す場合は，原子命題まで分解しないといけないので，図式として例示することは困難である．もっとも例 2.14 において p_0, p_1, p_2 が

任意の原子命題を表していると考えれば，それも一種の図式にはちがいないが，それは別の話である．

補題 2.15 Γ に対して開いた枝をもつタブローが存在すれば，Γ は充足可能である．

証明 Γ に対するあるタブローが開いた枝 $\mathcal{P}$ をもつとする．$\mathcal{P}$ は開いているので，$\mathcal{P}$ に現れるすべての複合命題（原子命題の否定以外）はタブロー規則によって分解されており，さらに原子命題 p とその否定 $\neg p$ がともに $\mathcal{P}$ の上に現れることはない．そこで，原子命題 p がそのまま（$\neg p$ の形でなく）$\mathcal{P}$ に現れるなら $V(p) = v(p) = \mathrm{T}$ とし，そうでないなら $V(p) = v(p) = \mathrm{F}$ とおいて，真理値関数 V を定義する．すると，$\mathcal{P}$ に属するすべての命題 A について，

$$V(A) = \mathrm{T}$$

となることが A の複雑さに関する帰納法でつぎのように示される．原子命題とその否定については，V の定義から明らか．複合命題についても，タブロー規則による枝のつくり方から容易にわかる．たとえば，$A \wedge B$ が枝 $\mathcal{P}$ に現れるなら，A も B も現れる．帰納法の仮定から，$A \wedge B$ よりも簡単な A と B については，V で真となることが分かっている．したがって，V の定義から $A \wedge B$ も真である．他の複合命題についても同様である．■

補題 2.16 Γ が充足可能であれば，Γ に対する任意の終タブローは開いた枝をもつ．

証明 Γ を充足可能な集合とする．タブローが充足可能であるとは，ある枝が存在し，その枝に現れる命題の集合が充足可能であるときとする．Γ に対する初期タブローは，充足可能である．

一般に，充足可能なタブロー τ にタブロー規則を適用して得られるタブロー τ' も充足可能であることがつぎのようにいえる．タブロー規則を適用して充足可能な枝 $\mathcal{P}$ について変更がないなら，タブローの充足可能性は自明に保たれる．そこで，充足可能な枝 $\mathcal{P}$ の命題にタブロー規則を適用する場合を考える．たとえば，$A \wedge B$ に対して規則を適用すれば，$\mathcal{P}$ の先に A と B を直列に

付け加える．$\mathcal{P}$ のすべての命題に T を割り当てる真理値関数を V とすれば，$V(A \wedge B) = \mathrm{T}$ であるから，真理値関数の条件より $V(A) = V(B) = \mathrm{T}$ であり，延長した枝も充足可能，つまり τ' も充足可能である．また，$A \vee B$ に対しては，枝の先を二つに分けて一方に A を，他方に B を付加する．$V(A \vee B) = \mathrm{T}$ であるから，$V(A) = \mathrm{T}$ または $V(B) = \mathrm{T}$ であり，少なくとも一方の枝については条件が保たれる．他のタブロー規則についても同様である．

終タブローの枝は，閉じているか開いているかである．閉じている枝は，ある命題 A とその否定 $\neg A$ がともに現れるので，充足可能にはなり得ない．したがって，Γ に対する任意の終タブローは開いた枝をもつ． ■

定理 2.17 Γ に対する閉タブローが存在する $\Longleftrightarrow$ Γ は充足不能である．

証明 $\Rightarrow$ の証明：補題 2.14 の対偶から明らか．

$\Leftarrow$ の証明：Γ は充足不能であるとする．Γ に対する終タブローをつくると，補題 2.15 の対偶からこのタブローは閉タブローになる． ■

系 2.18 $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to B \Longleftrightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B \Longleftrightarrow \{A_1, \ldots, A_n, \neg B\}$ は閉タブローをもつ．

例題 a 閉タブローを作成することにより，以下を示せ．

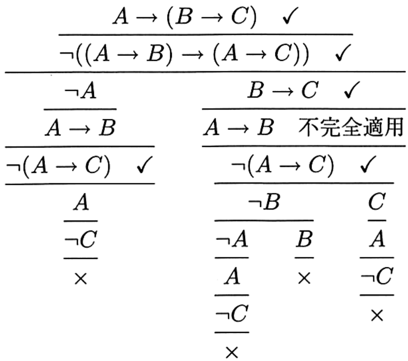
(1) $\models (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

(2) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

解 (1) $\{\neg B \to \neg A, \neg(A \to B)\}$ に対する閉タブローを構成する．

$$
\begin{array}{c}
\neg B \to \neg A \quad \checkmark \\
\hline
\neg(A \to B) \quad \checkmark \\
\hline
\begin{array}{cc}
\neg\neg B & \neg A \\
\hline
A & A \\
\hline
\neg B & \neg B \\
\hline
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

(2) $\{A \to (B \to C), \neg((A \to B) \to (A \to C))\}$ に対する閉タブローを構成する．

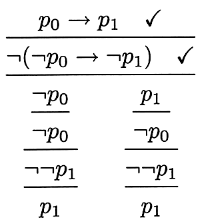


例題 b　終タブローを作成することにより，以下を示せ．

(1) $\not\models (p_0 \to p_1) \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$

(2) $\not\models (p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))$

解　(1) $\{p_0 \to p_1, \neg(\neg p_0 \to \neg p_1)\}$ に対する終タブローを構成する．



上のタブローにおける二つの枝はともに開いており，どちらにも $\neg p_0$ と p_1 が現れているので，$V(p_0) = \mathrm{F}$，$V(p_1) = \mathrm{T}$ とおいて，真理割り当て V を定義する．すると，$V(p_0 \to p_1) = \mathrm{T}, V(\neg(\neg p_0 \to \neg p_1)) = \mathrm{T}$ となり，$V((p_0 \to p_1) \to (\neg p_0 \to \neg p_1)) = \mathrm{F}$ となるから，$\not\models (p_0 \to p_1) \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$ が示される．

(2) $\{p_0 \to (p_1 \to p_2), \neg((p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))\}$ に対する終タブローを構成する．このとき，上の例題 a の (2) と似た形のタブローが得られるが，一番左の枝が開いたものになる．その枝に現れる命題は以下のようである．

$$p_0 \to (p_1 \to p_2),\ \neg((p_0 \to p_1) \to (p_1 \to p_2)),$$
$$\neg p_0,\ p_0 \to p_1,\ \neg(p_1 \to p_2),\ \neg p_0,\ p_1,\ \neg p_2.$$

したがって，$V(p_0) = V(p_2) = \mathrm{F}$, $V(p_1) = \mathrm{T}$ とおいて，V を定義すれば，$V(\text{与式}) = \mathrm{F}$ となって，題意が満たされる．

2.3　コンパクト性

前節では，有限集合 Γ に対して充足可能性を判定する方法を与えた．しかし，充足可能性は無限集合に対しても定義される概念であるから，その議論を無限集合に拡張しようと考えることは自然である．任意の無限集合について充足可能性を有限的に判定することはしょせん無理であるが，それを（無限個の）有限部分集合の性質に還元することは可能である．それを実現するのが以下に述べるコンパクト性定理であり，その証明は次章以降で述語論理を命題論理に還元する議論の原型になるものである．

定理 2.19（命題論理のコンパクト性定理（可算版））　Σ を命題の可算無限集合とする．そのすべての有限部分集合が充足可能であれば，Σ 全体も充足可能である．

証明　Σ を可算無限個の命題の集合 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ とする．まず，$\Sigma_1 = \{A_1\}$ に対して終タブロー τ_1 を構成する．Σ_1 は充足可能であるから，τ_1 には開いた枝が存在する．つぎに，τ_1 のすべての開いた枝の先に A_2 を追加する．それからさらに，タブロー規則を適用できるだけ適用し，その結果できるものを τ_2 とする．これは，$\Sigma_2 = \{A_1, A_2\}$ に対する終タブローにおいて，A_2 の出現を下方にずらしたものにすぎないから，開いた枝をもつという性質は変わらない．さらに，τ_2 の開いた枝の先に A_3 を加えて，タ

ブロー規則を適用して τ_3 をつくる．以下同様である．こうしてできる木の列 $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \tau_3 \subset \cdots$ の極限を $T = \bigcup_i \tau_i$ とおく．すると，T は無限木であり，かつ有限分岐である．したがって，ケーニヒの補題（定理 1.1）により，無限の枝が存在する．いま，原子命題 p が無限枝の節点に現れるなら $V(p) = \mathrm{T}$ とし，そうでないなら $V(p) = \mathrm{F}$ とおいて，真理値割り当てを定義する．すると，この枝に現れるすべての命題 A について

$$V(A) = \mathrm{T}$$

となることが補題 2.15 と同様にしていえる．よって，Σ 全体は充足可能である． ■

この定理の「コンパクト性」という名称は，ハイネ・ボレルの意味での位相空間のコンパクト性に由来する（位相空間の言葉遣いに不慣れな読者は以下をとばして，次節に進んでほしい）．原子命題 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ に真偽値 T, F を割り当てる関数は，2 進無限列，つまりコンパクト空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ の点とみなせる．すると，命題 A に対して，それを真とする真理値関数の全体 C_A は，（A に含まれる原子命題は有限個だから）その空間 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ の基集合（閉かつ開）とみなせる．よって，有限交叉性（Σ の任意の有限部分集合 Σ' に対して $\cap\{C_A : A \in \Sigma'\} \neq \emptyset$）を仮定すれば，コンパクト性から $\cap\{C_A : A \in \Sigma\} \neq \emptyset$ がいえる．位相空間のコンパクト性を使ったこのような議論は容易に非可算の場合に拡張される．非加算のコンパクト性定理は，次節で述べるように完全性定理からも導ける．

2.4　演繹体系と完全性定理

タブロー法は，トートロジーか否かを判定するための優れたアルゴリズムである．これに対し，トートロジー全体（あるいはその一部）を形式的に導出する仕組みが演繹体系である．演繹体系は，公理を重視するヒルベルト流と推論規則を重視するゲンツェン流の二つに大別される．タブロー法はゲン

ツェン流の演繹体系の亜種であるという見方が可能で，両者の厳密な関係は4.1 節で解説する．ここでは，形式的に扱いやすいヒルベルト流の公理系を導入して，それに対して完全性定理を証明する．最後に，タブロー法に対する完全性定理の証明の概略と，それに関わる重要な補題を示す．

ここで紹介するのはウカシェビッチによる公理系で，たった 3 つの公理からなる．公理となる命題はすでに例題などで用いたものであるが，名前を付けて，もう一度書いておく．

P1. $A \to (B \to A)$.

P2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

P3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

上式で A, B, C は任意の命題を表すから，正確にいえば，$\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}$ は三つの形の命題の集まり（公理図式）である．以下，公理図式を単に公理と呼ぶ．

論理記号 $\wedge, \vee$ が上の公理系に現れないわけは，それらは $\neg$，$\to$ によって定義できるからである．実際，$A \wedge B$ を $\neg(A \to \neg B)$ に，$A \vee B$ を $\neg A \to B$ に読み換えればよい．このとき，たとえば $(A \wedge B) \to (A \vee B)$ が成り立つかどうかは，$(\neg(A \to \neg B)) \to (\neg A \to B)$ が成り立つかどうかをみればよい．

これらの公理がトートロジーであることは，例題などでみた通りである．いま，これらから別のトートロジーを生成する規則として，三段論法 (Modus Ponens) を考える．公理から妥当な手段で生成される命題を一般に「定理」と呼ぶ．正確には，以下のように定義する．

定義 2.20　命題論理の定理 (theorem) はつぎのように定義される．

(1) 公理 $\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}$ は定理である．

(2) A と $A \to B$ が定理なら，B も定理である（三段論法）．

各定理の生成のプロセスを記述したものを「証明」と呼ぶ．正確には，以下のように定義する．

定義 2.21 命題の列 $A_0, A_1, \ldots, A_n$ が以下の条件を満たしているとき，その列を A_n の証明 (proof) という．各 $k \leq n$ について，

(1) A_k は公理 (P1, P2, P3) であるか，

(2) $i, j < k$ が存在して A_j は $A_i \to A_k$ である．

P1, P2, P3 以外の公理を仮定するとき，追加する公理（命題）の集合 Σ を理論と呼び，Σ において A が証明されることを，$\Sigma \vdash A$ と書く．Σ における証明は，上の定義の (1) を

(1′) A_k は公理 (P1, P2, P3) であるか，Σ に属するか

に置き換えて定義される．

こんな簡単な仕組みでも，すべてのトートロジーが定理として導ける．さらにいえば，$\Sigma \vdash A \Longleftrightarrow \Sigma \models A$（定理 2.26）が成り立つ．この事実を証明するためには，いくらか技術的な準備が必要である．ここでは，以下の事実を証明なしに仮定する．

定理 2.22（演繹定理） $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ ならば，$\Sigma \vdash A \to B$.

証明は，$\Sigma \cup \{A\}$ における B の証明の長さの帰納法による．文献 [田中 1997] などに証明がある．演繹定理の逆，すなわち $\Sigma \vdash A \to B$ ならば $\Sigma \cup \{A\} \vdash B$, は三段論法によってただちに得られる．

例題 $\vdash \neg A \to (A \to B)$ を示せ．

略解 演繹定理により，$\{\neg A, A\} \vdash B$ をいえばよい．$\{\neg A, A\} \vdash \neg A$ だから，P1 および三段論法を使って $\{\neg A, A\} \vdash \neg B \to \neg A$．P3 より $\{\neg A, A\} \vdash A \to B$．三段論法で，$\{\neg A, A\} \vdash B$. ■

上の例題は，矛盾（$\neg A$ かつ A）から任意の命題 B が導けることを意味する．

定義 2.23　命題の集合 Σ から矛盾 $\perp$ $(= \neg(p_0 \to p_0))$ が証明されるとき，Σ は矛盾する (inconsistent) という．そうでないとき，Σ は無矛盾である (consistent) という．

つぎの二つの補題は，上の例題を用いれば容易に証明できる．

補題 2.24　Σ が矛盾するとき，任意の命題 B に対して，$\Sigma \vdash B$.

補題 2.25　$\Sigma \vdash A$ かつ $\Sigma \vdash \neg A$ となる命題 A があれば，Σ は矛盾している．したがって，Σ が無矛盾であれば，任意の A に対し，A か $\neg A$ の少なくとも一方は Σ で証明できない，つまり $\Sigma \cup \{\neg A\}$ か $\Sigma \cup \{A\}$ の少なくとも一方は無矛盾である．

以上の準備のもとに，つぎの定理を示す．

定理 2.26（命題論理の（一般化された）完全性定理）　$\Sigma \vdash A \Longleftrightarrow \Sigma \models A$.

証明　$\Rightarrow$ の証明：V を Σ のすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数とする．3 つの公理 P については，すでにみたように $V(P) = \mathrm{T}$．また，$V(P) = \mathrm{T}$ かつ $V(P \to Q) = \mathrm{T}$ のとき，$V(Q) = \mathrm{T}$ となることも容易にわかる．よって，Σ から導かれるすべての定理 A について，$V(A) = \mathrm{T}$ となる．

$\Leftarrow$ の証明：命題 A が Σ の定理でないとし，それに値 F を割り当て，Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数が存在することをいえばよい．まず，すべての命題を適当な順番に並べて，$A_0, A_1, A_2, \ldots$ とする（注：非可算の場合は，整列定理（公理）を用いて超限的な順序で並べる）．$\Sigma_0 = \Sigma \cup \{\neg A\}$ とおくと，これは仮定により無矛盾．あとは，無矛盾な集合の無限増加列 $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots$ を以下のように定める．任意の $n \geq 0$ に対して，$\Sigma_n \cup \{A_n\}$ が無矛盾なら $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{A_n\}$ とおき，そうでないときは $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n$ とおく．

すると，$\Sigma = \bigcup_n \Sigma_n$ は無矛盾である．なぜなら，もしも Σ から矛盾 $\perp$ が導かれるなら，その証明に用いられる Σ の要素は有限個だから，十分大きな n に対して，それらはすべて Σ_n に入る．したがって，$\Sigma_n \vdash \perp$ となるが，これは Σ_n の無矛盾性に反する．さらに Σ は極大な無矛盾集合になっている．

すなわち，任意の命題 A_n に対し，$A_n \in \Sigma$ または $\neg A_n \in \Sigma$ がいえる．いま，$\Sigma \not\vdash A_n$ とすると，$\Sigma \cup \{\neg A_n\}$ は無矛盾だから，$A_m = \neg A_n$ として，$A_m \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$ である．つまり，$\Sigma \not\vdash A_n$ ならば，$\neg A_n \in \Sigma$ である．同様にして，$\Sigma \not\vdash \neg A_n$ ならば，$A_n \in \Sigma$ もいえる．Σ は無矛盾だから，補題 2.25 より A_n か $\neg A_n$ の少なくとも一方は Σ で証明できず，よって A_n か $\neg A_n$ の一方だけが Σ に属することがわかる．したがって，任意の命題 A_n に対し，$A_n \notin \Sigma \Longleftrightarrow \neg A_n \in \Sigma$ となる．

いま，つぎのように関数 V を定義する．

$$V(A_n) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow A_n \in \Sigma.$$

この定義から，V が命題 A に値 F を割り当て，Σ の命題すべてに値 T を割り当てることは明らかなので，あとはこの関数 V が真理値関数であることをいえばよい．まず，

$$V(\neg A_n) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A_n) = \mathrm{F}$$

であることは，上の段落で述べた極大無矛盾性よりただちにいえる．つぎに，

$$V(A_m \to A_n) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow V(A_m) = \mathrm{F} \text{ または } V(A_n) = \mathrm{T}$$

となることをみるために，

$$A_m \to A_n \in \Sigma \Longleftrightarrow \neg A_m \in \Sigma \text{ または } A_n \in \Sigma$$

を示す．$\Leftarrow$ は容易．$\Rightarrow$ を示すため，$A_m \to A_n \in \Sigma$ かつ $\neg A_m \notin \Sigma$ と仮定すれば，上の段落から $A_m \in \Sigma$ となり，$A_n \in \Sigma$ を得る．よって，V は命題 A に値 F を割り当て，Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数である．

■

系 2.27（命題論理のコンパクト性定理）　Σ の任意の有限部分集合に対し，それに属するすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数が存在すれば，Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数が存在する．

証明　対偶を示す．Σ の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数は存在しないと仮定する．証明すべきことは，Σ のある有限部分集合があって，それに属するすべての命題に値 T を割り当てる真理値関数が存在しないことである．さて，この仮定のもとでは，どんな命題も Σ のトートロジー的帰結になるが，とくに $\Sigma \models \neg(p_0 \to p_0)$ である．したがって，一般化された完全性定理により $\Sigma \vdash \neg(p_0 \to p_0)$ を得る．証明は有限個の命題で構成されているので，Σ のある有限部分集合 Σ' が存在して，$\Sigma' \vdash \neg(p_0 \to p_0)$．再び，一般化された完全性定理により $\Sigma' \models \neg(p_0 \to p_0)$．$\neg(p_0 \to p_0)$ に値 T を割り当てる真理値関数は存在しないので，Σ' の命題すべてに値 T を割り当てる真理値関数も存在しない． ■

命題論理の演繹体系とタブロー法の関係について，定理 2.26 と系 2.18 よりつぎのことがわかる．命題の有限集合 Γ に対し，

$$\Gamma \vdash A \Longleftrightarrow \Gamma \cup \{\neg A\} \text{ に対する閉タブローが存在する．}$$

この事実を，充足可能性の議論を経由せずに，直接証明してみようとすると，さらに興味深い発見がある．$\Leftarrow$ については，対偶で考え，無矛盾な Γ に対する終タブローは開いた枝をもつことを補題 2.16 と同様に示すことになる．$\Rightarrow$ について問題となるのは，三段論法の扱いである．すなわち，$\Gamma \cup \{\neg A\}$ に対する閉タブローと，$\Gamma \cup \{\neg(A \to B)\}$ に対する閉タブローから，$\Gamma \cup \{\neg B\}$ に対する閉タブローを構成したい．$\Gamma \cup \{\neg A\}$ に対する閉タブローから $\Gamma \cup \{\neg A, \neg B\}$ に対する閉タブローを構成することと，$\Gamma \cup \{\neg(A \to B)\}$ に対する閉タブローから $\Gamma \cup \{A, \neg B\}$ に対する閉タブローを構成することは容易である．したがって，以下のことがいえればよい．

補題 2.28　命題の有限集合 Γ に対し，$\Gamma \cup \{A\}$ と $\Gamma \cup \{\neg A\}$ とに対する閉タブローが存在すれば，Γ に対する閉タブローも構成できる．

証明の概略　A の複雑さに関する帰納法による．まず，A を原子命題とし，$\Gamma \cup \{A\}$ に対する閉タブローをつくる．そこで A が用いられるのは，$\neg A$ が現れる枝を閉じるためだけである．しかし，$\neg A$ が現れる枝については，

$\Gamma\cup\{\neg A\}$ が閉タブローをもつことから，A を用いなくても，先の枝をすべて閉じることができる．つぎに，A を $B\to C$ の形の命題とする．$\Gamma\cup\{B\to C\}$ と $\Gamma\cup\{\neg(B\to C)\}$ とに対する閉タブローから，$\Gamma\cup\{\neg B\}$ と $\Gamma\cup\{C\}$ と $\Gamma\cup\{B,\neg C\}$ とに対する閉タブローが構成できる．さらに，$\Gamma\cup\{C\}$ の閉タブローから $\Gamma\cup\{B,C\}$ の閉タブローを構成する．すると，帰納法の仮定により，まず $\Gamma\cup\{B\}$ の閉タブローが得られ，もう一度帰納法の仮定により，Γ の閉タブローが得られる． ■

補題 2.28 およびその証明は，ゲンツェンの主定理（定理 4.6 参照）の命題論理版に相当するものである．この補題をさらにゲンツェンの主定理に近い形に言い換えると，つぎの新しいタブロー規則（前提命題をもたない）を導入しても，命題の有限集合 Γ が閉タブローをもつか否かの条件は変わらない．

$$\frac{\cdots}{A \qquad \neg A}$$

すなわち，Γ が上記のタブロー規則を含む閉タブローをもつなら，それを含まない閉タブローももつことになる．

第3章
述語論理

述語論理において，原子命題は「主語＋述語」のように分解される．もう少し厳密にいえば，「複数主語＋関係」のように分解される．そして，新しい論理記号として，量化記号 (quantifier)

$$\forall \text{（任意の__について），} \exists \text{（ある__について）}$$

を用いることで，「関係」の大域的状態も記述できるようになる．

本章では，関数記号や等号をもたない述語論理を扱い，次章で本章の結果を関数記号や等号をもつ論理に拡大する．

まず，タブロー法を述語論理に拡張し，3.3 節で「基本定理」を証明し，それを用い，3.4 節で完全性定理を証明する．

3.1　論理式と構造

述語論理における文（命題）は，数学的構造についての記述である．文の集合を理論 (theory) もしくは公理系と呼び，理論 T のすべての文を成り立たせる構造を T のモデル (model) と呼ぶ．また，どんな構造においても成り立つ文を恒真 (valid) 文といい，モデルをもつ理論を充足可能 (satisfiable) な理論という．述語論理の恒真性や充足可能性は，命題論理のそれらの類似物であるが，同一物ではない．したがって，とくに述語論理の文脈で，命題

論理の恒真性を扱う場合はトートロジーと呼ぶことが多い．われわれの当面の目標は，述語論理の文に対してその恒真性を判定できるようにタブロー法を拡張することである（注：厳密に有限的な判定は原理的に不可能である）．その作業にとりかかる前に，言語や真偽の概念をもう少し厳密に定めておかねばならない．

述語論理で用いる記号には，どの理論にも共通したもの（論理記号，変数，等号，その他括弧など付随的な記号）と理論固有のもの（数学的記号）がある．数学的記号には，関係記号，定数(記号)，関数記号の 3 種類があるが，本節では関数記号は扱わない．つまり，ここで理論の言語形式を定めるのは，定数と関係記号である．

定義 3.1　述語論理の言語 (language, signature) $\mathcal{L}$ は，定数 c_i と関係記号 R_j のリストである．

$$\mathcal{L} = (c_0, c_1, \ldots; R_0, R_1, \ldots).$$

この記号リストは，可算無限のような書き方をしているが，有限でもよいし，非可算でもよい．また，各関係記号 R には，あらかじめ元数（arity, 引数の個数）が定められており，それを明示したい場合には $R(x_1, \ldots, x_n)$ のように表す．このとき，R は n 項関係であるともいう．

定義 3.2　言語 $\mathcal{L}$ における構造 (structure) または $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ は，つぎのものからなる．

(1) 空でない集合 $M = |\mathcal{M}|$．これを $\mathcal{M}$ の領域 (domain) または宇宙 (universe) と呼ぶ．

(2) 各定数 $c \in \mathcal{L}$ に対して，$|\mathcal{M}|$ の要素 $c^{\mathcal{M}} \in M$．

(3) 各 n 項関係記号 $R \in \mathcal{L}$ に対して，M 上の関係 $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$．

この構造を $\mathcal{M} = (M; c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}}, \ldots; R_0^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \ldots)$ と表し，誤読が生じない場合には，仕切り記号としてセミコロン; の代わりにコンマ, を用い，さらに右肩の $\mathcal{M}$ を省略する．

定義 3.3 言語 $\mathcal{L}$ の論理式 (formula) をつぎのように定義する.

(1) つぎの形の記号列は（原子）論理式である.

$$R(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

ここで，$t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ は $\mathcal{L}$ の定数もしくは変数，R は $\mathcal{L}$ の n 項関係記号である.

(2) φ と ψ を言語 $\mathcal{L}$ の論理式，x を変数として，

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \to (\psi),\ \forall x(\varphi),\ \exists x(\varphi)$$

は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である（括弧は適当に省略する).

本書では，一般の論理式を φ, ψ, θ などで表す.

例 3.4 $\mathcal{L} = (0, 1; \mathrm{plus}(x, y, z), \mathrm{minus}(x, y))$ とすると，$\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}; \mathbf{0}, \mathbf{1}; \mathbf{plus}, \mathbf{minus})$ は $\mathcal{L}$ 構造である．ここで，$\mathbb{Z}$ は整数全体を表し，$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ はその二つの要素を表す．さらに，

$$\mathbf{plus}(x, y, z) \Longleftrightarrow x + y = z,$$

$$\mathbf{minus}(x, y) \Longleftrightarrow x = -y$$

とする．この言語において，

(1) $\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0)$ は原子論理式である.

(2) $\forall x_0 \forall x_1 (\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0) \to \mathrm{minus}(x_0, x_1))$ は論理式である.

ある論理式を生成する過程で現れる論理式をその論理式の部分式 (subformula) と呼ぶ．上例 (2) の論理式の部分式は，2 つの原子部分式 $\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0)$, $\mathrm{minus}(x_0, x_1)$ と，それらを $\to$ でつないだ $\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0) \to \mathrm{minus}(x_0, x_1)$, そして $\forall x_1(\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0) \to \mathrm{minus}(x_0, x_1))$，および全体 $\forall x_0 \forall x_1$ $(\mathrm{plus}(x_0, x_1, 0) \to \mathrm{minus}(x_0, x_1))$ である.

ある論理式 φ が，$\forall x\psi(x)$ または $\exists x\psi(x)$ の形の部分式をもつとき，その部分式のなかに現れる変数 x は束縛されている (bounded) といい，そうでないものを自由である (free) という．論理式 φ に含まれるいくつかの変数（たとえば x, y）の自由な現れに注目して，その論理式を $\varphi(x, y)$ のように記すことがある．そして，論理式 $\varphi(x)$ における変数 x の自由な出現をすべて s（変数または定数）に置き換えてできる論理式を $\varphi(s)$ と書く．このとき，つぎのような約束をしておく．代入項 s が変数であり，代入の結果束縛されてしまう場合，φ の束縛変数のほうをあらかじめ新しい変数に置き換えておく．たとえば，$\forall y\varphi(x, y)$ に $x = y$ を代入する場合，$\varphi(x, y)$ に含まれない新しい変数 w を選んで，$\forall w\varphi(x, w)$ と書き直してから，$x = y$ を代入して，$\forall w\varphi(y, w)$ とする．

定義 3.5　論理式 φ に現れるすべての変数が束縛されているとき，φ を文 (sentence) または閉論理式 (closed formula) という．文の集合は，理論 (theory) と呼ばれる．また，量化記号をもたない論理式は，量化記号なしの (quantifier-free) 論理式，または開論理式 (open formula) と呼ばれる．

論理式 φ に現れるすべての自由変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を束縛して得られる文 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi$ を，φ の全称閉包 (universal closure) と呼ぶ．論理式とその全称閉包は，しばしば同一視される．論理式の集合を理論と呼ぶときには，各論理式は必要に応じて全称閉包に直して扱われる．

つぎに，文に対する真偽の概念を定義する．まず，原子文に対する真偽をつぎのように定める．

定義 3.6　$\mathcal{M}$ を言語 $\mathcal{L}$ における構造とする．R を $\mathcal{L}$ の n 項関係記号とし，$c_0, \ldots, c_{n-1}$ を定数として，$R^{\mathcal{M}}(c_0^{\mathcal{M}}, \ldots, c_{n-1}^{\mathcal{M}})$ が成り立つならば，原子論理式 $R(c_0, \ldots, c_{n-1})$ は $\mathcal{M}$ において真 (true) であり，そうでなければ偽 (false) であるという．

$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ における一般の文に対する真偽を定めるため，言語の拡大を定義する．まず，領域 $M = |\mathcal{M}|$ の各要素 a に対する名前（新しい定数）a^* を用意し，

それらを $\mathcal{L}$ に加えた言語を $\mathcal{L}_M$ で表す．すなわち，$\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{a^* : a \in M\}$．そして，定数 a^* の解釈を a として，構造 $\mathcal{M}$ を言語 $\mathcal{L}_M$ に拡張したものを $\mathcal{M}_M$ で表す．拡張構造 $\mathcal{M}_M$ を，単に $\mathcal{M}$ で表すことも多い．以下では，表記上の簡潔さのため，$|\mathcal{M}|$ の要素 a と定数 a^* を区別しない．

定義 3.7　構造 $\mathcal{M}_M$ における真理値関数 $V_\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}_M$ の文全体から $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ への関数で，以下の条件（タルスキの真理定義条項 (truth definition clauses)）を満たすものと定める．

(1) L_M の原子文 φ について，$V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{T} \iff \varphi$ は $\mathcal{M}$ で真．

(2) $V_\mathcal{M}(\neg\varphi) = \mathrm{T} \iff V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{F}$.

(3) $V_\mathcal{M}(\varphi \land \psi) = \mathrm{T} \iff V_\mathcal{M}(\varphi) = V_\mathcal{M}(\psi) = \mathrm{T}$.

(4) $V_\mathcal{M}(\varphi \lor \psi) = \mathrm{T} \iff V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{T}$ または $V_\mathcal{M}(\psi) = \mathrm{T}$.

(5) $V_\mathcal{M}(\varphi \to \psi) = \mathrm{T} \iff V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{F}$ または $V_\mathcal{M}(\psi) = \mathrm{T}$.

(6) $V_\mathcal{M}(\forall x\varphi(x)) = \mathrm{T} \iff$ すべての定数 $a \in M$ について，$V_\mathcal{M}(\varphi(a)) = \mathrm{T}$.

(7) $V_\mathcal{M}(\exists x\varphi(x)) = \mathrm{T} \iff$ ある定数 $a \in M$ が存在して，$V_\mathcal{M}(\varphi(a)) = \mathrm{T}$.

$\mathrm{Th}(\mathcal{M}_M) = \{\varphi : V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{T}\}$ は構造 $\mathcal{M}$ の初等ダイヤグラム (elementary diagram) と呼ばれる．

定義 3.8　$\mathcal{L}$（もしくは $\mathcal{L}_M$）の文 φ が $V_\mathcal{M}(\varphi) = \mathrm{T}$ を満たすとき，φ は構造 $\mathcal{M}$ で真 (true) であるといい，$\mathcal{M} \models \varphi$ と書く．一般の論理式 φ に対しては，その全称閉包 $\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}\varphi$ が構造 $\mathcal{M}$ で真であるときに，$\mathcal{M} \models \varphi$ とする．

定義 3.9　T を言語 $\mathcal{L}$ の文の集合とする．T のすべての要素が構造 $\mathcal{M}$ で真であるときに，構造 $\mathcal{M}$ は理論 T のモデル (model) であるといい，$\mathcal{M} \models T$ と書く．モデルをもつ理論を充足可能 (satisfiable) な理論という．

定義 3.10　T を言語 $\mathcal{L}$ の文の集合とし，φ を $\mathcal{L}$ の論理式とする．T の任意のモデル $\mathcal{M}$ において，$\mathcal{M} \models \varphi$ となるとき，φ は T の帰結 (consequence)

であるといい，$T \models \varphi$ と書く．とくに，任意の構造 $\mathcal{M}$ で真となる論理式を恒真な (valid) 論理式であるという．

本章の冒頭にも述べたように，述語論理の恒真性や充足可能性は，命題論理のそれらの類似物ではあるが，同一のものではないことに注意されたい．また，普通の数学において，公理系 T において論理式 φ が成り立つことを形式的に表現したものが，$T \models \varphi$ に他ならない．この関係をタブロー法によって捉えることが次節の目標である．

3.2 述語論理のタブロー法

命題論理のタブローは，最初に与えられた命題の集合を根元におき，7 つのタブロー規則によって命題をつぎつぎ分解していってつくられる木構造であった．これに新たな規則を加え，述語論理の恒真性を扱えるようにしたい．結論からいえば，恒真性を表現するタブローは構成できるが，その構成が有限で完了するか否かを一般的に判定する方法がない．しかし，これは十分に実用的な手法であって，かつ述語論理の性質を分析するためにも有用な手段である．

述語論理のタブロー規則の記述には仮想モデルの要素を表す定数がたくさん必要である．これを変数で代用することも可能ではあるが，新しい定数を十分用意することでつねに文だけを扱うようにしたほうが，形式的にエレガントであるし，直観的にも理解しやすい．そこで，以下では，与えられた言語 $\mathcal{L}$ は無限個の定数をもつと仮定する（なければ加えればよい）．

さて，われわれは以下のようなタブロー規則を設定する．

定義 3.11 述語論理のタブロー規則は，命題論理の 7 つの規則に，つぎの 4 つを加えたものである．

$$\frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(a)}, \qquad \frac{\exists x \varphi(x)}{\varphi(b)}, \qquad \frac{\neg\forall x \varphi(x)}{\neg\varphi(b)}, \qquad \frac{\neg\exists x \varphi(x)}{\neg\varphi(a)}.$$

ただし，a は任意の定数で，b は新しい定数を表す．

注：“新しい” 定数というのは，それまでに使われていないという意味である．これについては規則の適用のところでくわしく説明する．

定義 3.12 Γ を文の有限集合とする．Γ に対する（述語論理の）タブローは，以下のように定義される．

(1) Γ の要素を縦に並べたものは,（初期）タブローである．

(2) 与えられたタブローにおいて，ある閉じていない枝に分解可能な命題が現れていれば，その形に対応したタブロー規則を適用して，その枝の先にタブロー規則の下式を加えてできるものもタブローである．
　ただし，枝が閉じているとは，ある命題 A とその否定 $\neg A$ がともに現れることをいう．枝が開いているとは，それが閉じておらず，分解可能な命題はすでに分解してあるものをいう．すべての枝が閉じているか開いているようなタブローを終タブローと呼び，すべての枝が閉じているタブローを閉タブローと呼ぶ．

$\forall x\varphi(x)$ の規則の適用については，つぎのように約束する．$\forall x\varphi(x)$ を含む閉じていない枝に対し，その枝に現れるすべての定数 a について $\varphi(a)$ を（それがすでに現れていなければ）枝の先に加える．何も定数が出現しない枝については，新たな変数 b を一つ選んで $\varphi(b)$ を付け加える．

$\exists x\varphi(x)$ の規則の適用については，つぎのように約束する．$\exists x\varphi(x)$ を含む閉じていない枝に対し，その枝に現れない新たな定数 b を一つ選んで $\varphi(b)$ を付け加える．ただし，すでにある定数 a について $\varphi(a)$ を含んでいるなら何も加えない．

$\neg\forall x\varphi(x)$ の規則の扱いは，$\exists x\varphi(x)$ の規則と同様とし，$\neg\exists x\varphi(x)$ の規則の扱いは，$\forall x\varphi(x)$ の規則と同様とする．

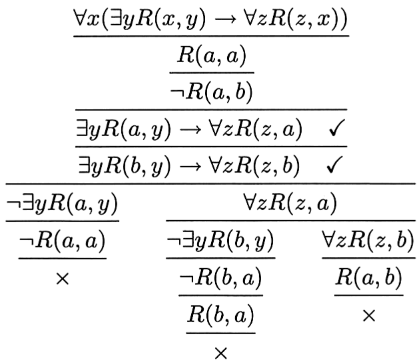
閉じた枝の下に

$$\frac{\vdots}{\times}$$

を付加するのは，命題論理の場合と同様である．また，規則の無駄な適用を避けるための ✓ 記号の付け方は，命題論理の規則については以前と同様である．$\exists x\varphi(x)$ と $\neg\forall x\varphi(x)$ の規則については，適用対象となる論理式を含むすべての閉じていない枝を規則によって伸ばしてからチェックを付ける．$\forall x\varphi(x)$ と $\neg\exists x\varphi(x)$ については，いくら規則を適用してもチェックを付けない．

述語論理の場合には，与えられた Γ から終タブローが得られない場合もある．そのような場合，規則の適用が無限回続くことになるが，それによって無限の大きさの木が得られると考えてもよい．その木は有限分岐であるから，ケーニヒの補題によって無限の枝（道）をもつことが保証される．

例 3.13　$\Gamma = \{\forall x(\exists yR(x,y) \to \forall zR(z,x)), R(a,a), \neg R(a,b)\}$ に対する終タブローをつくる．これは，すべての枝が閉じたタブローであり，あとで示すように，これから $\{\forall x(\exists yR(x,y) \to \forall zR(z,x)), R(a,a)\} \models R(a,b)$ が導かれる．



例 3.14　$\Gamma = \{\exists xP(x), \exists xQ(x), \neg\exists x(P(x) \land Q(x))\}$ に対する終タブローをつくる．これは，開いた枝をもつタブローであり，これから $\{\exists xP(x), \exists xQ(x)\} \not\models \exists x(P(x) \land Q(x))$ が導かれる．

$$
\begin{array}{c}
\exists x P(x) \quad \checkmark \\ \hline
\exists x Q(x) \quad \checkmark \\ \hline
\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \qquad \checkmark \\ \hline
P(a) \\ \hline
Q(b) \\ \hline
\neg (P(a) \wedge Q(a)) \quad \checkmark \\ \hline
\neg (P(b) \wedge Q(b)) \quad \checkmark \\ \hline
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \neg P(a) \\ \hline \times \end{array} &
\begin{array}{c} \neg Q(a) \\ \hline \begin{array}{cc} \neg P(b) & \begin{array}{c} \neg Q(b) \\ \hline \times \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

例 3.15　$\Gamma = \{\forall x \exists y S(x,y), \neg S(a,a)\}$ に対して終タブローを構成しようとすると，以下のように無限に成長する木になる．この場合も，$\forall x \exists y S(x,y) \not\models S(a,a)$ が導かれる．

$$
\begin{array}{c}
\forall x \exists y S(x,y) \\ \hline
\neg S(a,a) \\ \hline
\exists y S(a,y) \quad \checkmark \\ \hline
S(a,b) \\ \hline
\exists y S(b,y) \quad \checkmark \\ \hline
S(b,c) \\ \hline
\vdots
\end{array}
$$

例 3.15 については，どのように終タブローをつくっても無限木になってしまう．しかし，同じ Γ に対しても，タブロー規則を構成する順番によって，有限タブローが構成されたり，無限木になったりすることがある．たとえば，例 3.13 と例 3.15 を組みあわせて，$\Gamma = \{\forall x \exists y S(x,y), \forall x(\exists y R(x,y) \rightarrow \forall z R(z,x)), R(a,a), \neg R(a,b)\}$ とおく．$\forall x \exists y S(x,y)$ に対して，タブロー規則をくり返していれば，例 3.15 のように木はいつまでも成長する．他方，$\forall x \exists y S(x,y)$ を後回しにしておけば，ほぼ例 3.13 と同じタブローが構成される．有限タブローが生成可能な場合には，なるべくそれがつくられるように

タブロー規則を適用したい．それには，$\forall x\varphi(x)$ の規則を無駄にくり返さないようにすればよい．

以上の考察をもとに，タブロー規則の適用の順序をつぎのように定める．

タブロー規則適用の標準的順序　タブロー規則を以下の順番で適用する．

1. 命題論理記号の規則を適用できるだけ適用する．
2. $\exists$ と $\neg\forall$ の規則を適用できるだけ適用する．
3. $\forall$ と $\neg\exists$ の規則を適用できるだけ適用する．
4. 1 に戻る．

標準的順序に従わなくても，有限の終タブローが得られるなら，それでよい．しかし，標準的順序に従うなら，有限の終タブローがあるときには，必ずその一つが生成される．肝心なことは，閉じない枝に現れるどの論理式にも，いつかはタブロー規則が適用されるようにすることであり，こうすることで以下の定理が成り立つ．

定理 3.16（タブロー法の完全性）　言語 $\mathcal{L}$ における文の有限集合 Γ が与えられたとする．標準的順序に従ってタブロー規則を適用して，開いた枝をもつ有限タブローか，もしくは無限木が生成されれば，Γ は充足可能である（モデルをもつ）．

証明　言語 $\mathcal{L}$ における文の有限集合 Γ に対して，標準的順序のタブロー規則適用で，開いた枝もしくは無限の長さの枝をもつ木が生成されたとする（後者の場合，無限木に対するケーニヒの補題を用いて，無限の枝を得る）．いま，そのような枝 $\mathcal{P}$ に現れる文の集合も $\mathcal{P}$ で表す．さらに，$\mathcal{P}$ に現れる定数の集合を D とする．すると，タブロー規則の定義および標準的順序の適用から，以下が成り立つ．

$$\varphi \wedge \psi \in \mathcal{P} \Longrightarrow \varphi, \psi \in \mathcal{P}.$$
$$\varphi \vee \psi \in \mathcal{P} \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{P} \text{ または } \psi \in \mathcal{P}.$$
$$\varphi \to \psi \in \mathcal{P} \Longrightarrow \neg\varphi \in \mathcal{P} \text{ または } \psi \in \mathcal{P}.$$
$$\forall x\varphi(x) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \text{ 任意の } a \in D \text{ に対し } \varphi(a) \in \mathcal{P}.$$
$$\exists x\varphi(x) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \text{ ある } a \in D \text{ に対し } \varphi(a) \in \mathcal{P}.$$
$$\neg(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \neg\varphi \in \mathcal{P} \text{ または } \neg\psi \in \mathcal{P}.$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \neg\varphi, \neg\psi \in \mathcal{P}.$$
$$\neg(\varphi \to \psi) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \varphi, \neg\psi \in \mathcal{P}.$$
$$\neg(\forall x\varphi(x)) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \text{ ある } a \in D \text{ に対し } \neg\varphi(a) \in \mathcal{P}.$$
$$\neg(\exists x\varphi(x)) \in \mathcal{P} \Longrightarrow \text{ 任意の } a \in D \text{ に対し } \neg\varphi(a) \in \mathcal{P}.$$
$$\neg\neg\varphi \in \mathcal{P} \Longrightarrow \varphi \in \mathcal{P}.$$
$$\neg\varphi \in \mathcal{P} \Longrightarrow \varphi \notin \mathcal{P}.$$

上記の条件を成り立たせる文の集合 $\mathcal{P}$ を，ヒンティカ集合 (Hintikka set) という．ヒンティカ集合 $\mathcal{P}$ のモデルはつぎのように簡単に構成できる．まず，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M} = (M, (c^{\mathcal{M}})_{c\in\mathcal{L}}), (R^{\mathcal{M}})_{R\in\mathcal{L}})$ を以下のように定める．

$$M = D,$$
$$c^{\mathcal{M}} = c \quad (\text{各定数 } c \in \mathcal{L}),$$
$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathcal{M}} \Longleftrightarrow R(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{P} \quad (\text{各関係記号 } R \in \mathcal{L}).$$

すると，$\mathcal{M} \models \mathcal{P}$ がいえる．理由はつぎの通りである．もし，$\varphi \in \mathcal{P}$ で，$\mathcal{M} \not\models \varphi$ となるものがあるとすれば，そのようなもののうちで一番簡単な形のものを選ぶ．たとえば，$\varphi \equiv \psi_0 \vee \psi_1$ としよう．上記の性質から，$\psi_0 \in \mathcal{P}$ または $\psi_1 \in \mathcal{P}$ であるから，仮に $\psi_0 \in \mathcal{P}$ としよう．すると，帰納法の仮定より，$\mathcal{M} \models \psi_0$．よって，タルスキの定義 3.7 から $\mathcal{M} \models \varphi$ となって矛盾．φ が他の形でも同様である．

とくに$\Gamma \subset \mathcal{P}$だから，$\mathcal{M} \models \Gamma$となる．よって，$\Gamma$は充足可能である．■

つぎに，定理3.16の逆を示そう．そのために，少し準備を要する．τをタブロー（無限木の場合も含む）とする．τのある枝$\mathcal{P}$が存在し，その枝に現れる文全部の集合が充足可能であれば，τは充足可能であるという．上の証明は，開いた枝をもつタブローや無限のタブローが充足可能であることを示している．

補題 3.17　タブローτが充足可能であれば，それにタブロー規則を適用して得られるタブローτ'も充足可能である．

証明　τを充足可能なタブローとし，ある枝に現れる充足可能な文の集合を$\mathcal{P}$としておく．τにタブロー規則を適用して，$\mathcal{P}$について変更がないなら，充足可能は保たれる．そこで，$\mathcal{P}$の中の文φにタブロー規則が適用される場合を考える．たとえば，$\varphi \equiv \psi_0 \vee \psi_1$としよう．すると，$\mathcal{P} \cup \{\psi_0\}$と$\mathcal{P} \cup \{\psi_1\}$の枝ができる．$\mathcal{P}$のモデルは$\varphi \equiv \psi_0 \vee \psi_1$を成り立たせるので，少なくとも一方の枝に対するモデルになる．命題論理の規則については，他も同様に扱える．$\forall$の規則については，とくに何も手を加えずに$\mathcal{P}$のモデル$\mathcal{M}$が$\varphi(a)$を満たす．$\exists$の規則については，$\mathcal{P}$のモデル$\mathcal{M}$に，定数bについての新しい解釈を加える必要がある．$\exists x\psi(x)$が$\mathcal{M}$で真であれば，$\psi(m)$を成り立たせる$\mathcal{M}$の元mがあるはずなので，$b^{\mathcal{M}} = m$とおけばよい．こう変更しても$\mathcal{M}$が$\mathcal{P}$のモデルであることは何ら影響を受けない．$\neg\forall$と$\neg\exists$の規則の扱いも同様である．■

定理 3.18　充足可能な有限集合Γに対しては，どのように規則を適用しても，開いた枝をもつ終タブローが生成されるか，または無限木が生成される．対偶を述べれば，Γに対する閉タブローが存在すれば，Γは充足不能である．

証明　閉タブローにおいてはどの枝も充足可能でないから，閉タブローは充足可能でない．したがって，Γに対する閉タブローが存在すれば，上の補題からΓは充足可能ではあり得ない．■

系 3.19　$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \psi \iff \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$は閉タブローをもつ．

証明　定理 3.16 と定理 3.18 による．■

述語論理の恒真性や充足可能性を一般的に判定するアルゴリズムが存在しないことは，チャーチの定理として知られている．しかし，制限した形の文に対してなら，判定が可能になる．それを簡単に述べておこう．

$\forall$ 式（文）とは，量化記号のない論理式の前に $\forall$ 型の量化記号を付けて得られる論理式（文）である．$\exists$ 式（文）とは，量化記号のない論理式の前に $\exists$ 型の量化記号を付けて得られる論理式（文）である．$\forall\exists$ 文とは，$\exists$ 論理式の前に $\forall$ 型の量化記号を付けて得られる文である．$\exists\forall$ 文も同様に定義される．

定理 3.20　（関数記号なしの述語論理において）$\forall$ 文の有限集合が充足可能であるか否かは決定可能である．さらに，$\exists\forall$ 文の有限集合から $\forall\exists$ 文が導けるか否かも決定可能である．

証明　$\forall$ のタブロー規則において，下式の論理式はすでに使われている定数のみを代入するので新しい定数を導入する規則なしにタブローの構成が無限に続くことはない．したがって，$\forall$ 文の有限集合 Γ を初期タブローとして，タブロー規則を標準的順序で適用すれば，必ず有限回で終タブローが得られ，それが閉タブローになるか否かで Γ の充足不能性が判定できる．$\exists\forall$ 文の有限集合から $\forall\exists$ 文が導けるか否かは，$\exists\forall$ 文の集合の充足不能性に還元される．$\exists\forall$ 文の集合を初期タブローとして，タブロー規則を標準的順序で適用すると，まずすべての $\exists$ 型の量化記号がはずされ，あとは $\forall$ 文だけの場合と同じに扱えるから，その充足不能性は決定可能になる[1)]．■

3.3　述語論理の基本定理

述語論理の文をその外側から命題結合記号をはずしていくと，冠頭に量化記号をもつ文と原子文に分解される．そのように分解してできた各々の文を命題論理の原子命題とみなすことにより，命題論理のトートロジーやトート

1)　等号をもつ論理については，第 I 部付録の例 10 を参照．

ロジー的帰結という概念が，述語論理においても自然に定義できる．換言すれば，述語論理のトートロジーは，命題論理のトートロジーの原子命題を述語論理の任意の文に置き換えたものである．たとえば，$p_0 \to (p_1 \to p_0)$ は命題論理のトートロジーであるから，

$$\forall x R(x) \to (\exists x S(x) \to \forall x R(x))$$

は述語論理においてもトートロジーである．しかし，

$$\forall x R(x) \to \forall x (S(x) \vee R(x))$$

は恒真だが，トートロジーではない．

これから示したいことは，述語論理における恒真文は，量化記号に関するいくつかの公理のトートロジー的帰結になること，図式的には

述語論理の恒真性 ＝ トートロジー ＋ 量化公理

が成り立つことである．この事実を「述語論理の基本定理」という [Smullyan 1968].

定義 3.21　つぎの形の文を文 φ の随伴（量化）公理 (companion axiom) という．

(1) $\forall x \psi(x) \to \psi(a)$.

(2) $\psi(b) \to \forall x \psi(x)$.

(3) $\exists x \psi(x) \to \psi(b)$.

(4) $\psi(a) \to \exists x \psi(x)$.

ただし，a は任意の定数で，b は φ にも $\psi(x)$ にも現れない定数である．

定義 3.21 で，φ の随伴公理と呼ばれる文が，φ とほとんど無関係なのが奇異にみえるだろう．「述語論理の基本定理」において必要となる随伴公理は，上の定義における $\forall x \psi(x)$ や $\exists x \psi(x)$ が，φ の部分式（正確には，その変数

に定数を代入して得られる文）になるものだけであるが，議論を簡単にするためにそのような制約は設けない．

補題 3.22 文 θ を文 φ の随伴公理とする．このとき，

$$\varphi \text{ が恒真} \iff \theta \to \varphi \text{ が恒真.}$$

証明 $\Rightarrow$ は自明．$\Leftarrow$ を対偶で示すために，φ が恒真でないとする．すると，$\neg\varphi$ のモデル $\mathcal{M}$ が存在する．これから，θ かつ $\neg\varphi$ のモデルが得られれば，$\theta \to \varphi$ が恒真でなくなり，$\Leftarrow$ の対偶が示される．

θ が $\forall x\psi(x) \to \psi(a)$ か $\psi(a) \to \exists x\psi(x)$ とする．すると，θ は恒真式であるから，$\mathcal{M}$ でも真となり，$\mathcal{M}$ は θ かつ $\neg\varphi$ のモデルである．

θ が $\psi(b) \to \forall x\psi(x)$ であるとし，$\mathcal{M}$ で偽であると仮定する．このとき，$\mathcal{M}$ において $\neg\forall x\psi(x)$，すなわち $\exists x\neg\psi(x)$ が真となるから，$\neg\psi(c)$ を真にする $c \in M$ が存在する．そこで，定数 b の解釈を c とし，それ以外をすべて $\mathcal{M}$ と同じにして，構造 $\mathcal{M}'$ を定義する．すると，$\psi(b)$ は $\mathcal{M}'$ で偽となる．よって，$\psi(b) \to \forall x\psi(x)$ は $\mathcal{M}'$ で真である．一方，$\neg\varphi$ は定数 b を含まないので，b の解釈の変更と関わりなく $\mathcal{M}'$ でも成り立ち，$\mathcal{M}'$ は θ かつ $\neg\varphi$ のモデルである．θ が $\exists x\psi(x) \to \psi(b)$ の場合も同様である． ■

定義 3.23 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ が φ の随伴公理列あるいは随伴列 (companion sequence) であるとは，各 $i < n$ について，θ_{i+1} が $(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_i) \to \varphi$ に対する随伴公理になっていることをいう．

定理 3.24（述語論理の基本定理） φ が恒真 $\iff$ φ に対する随伴列 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ が存在して，$(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) \to \varphi$ がトートロジーになる．

証明 $\Leftarrow$ は，補題 3.22 をくり返し用いればよい．$\Rightarrow$ を示すために，φ を恒真文とする．すると，系 3.19 より，$\neg\varphi$ に対する閉タブローが存在する．この閉タブローを得る過程において，タブロー規則を適用して生成されるタブローの列を $\tau_0(= \neg\varphi), \tau_1, \ldots, \tau_k$ とする．これに対して，われわれは命題論理規則だけを使ったタブローの列 $\tau'_0(= \tau_0), \tau'_1, \ldots, \tau'_k$ を構成する．ここで，τ'_i は，根元に随伴列 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ を加えるだけで，本質的には τ_i と同型な木構造

である．すると，τ'_k は命題論理の閉タブローであるから，$(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) \to \varphi$ がトートロジーであることが示される．

さて，τ_i から τ_{i+1} へ変形が命題論理のタブロー規則によって行われているなら，τ'_i の対応する箇所に同じ規則を適用することで τ'_{i+1} を得る．量化記号に関するタブロー規則については，随伴量化公理を根元に追加し，命題論理のタブロー規則 $(\to)$ を適用する操作に置き換わる．くわしくは以下のようになる．

最初に，τ_i から τ_{i+1} へ変形が下のタブロー規則の適用による場合について考えよう．

$$\frac{\exists x \psi(x)}{\psi(b)}$$

この規則により，$\exists x \psi(x)$ を含む閉じていない枝に対し，新しい変数 b を一つ選んで $\psi(b)$ を付け加えたとする．

これに対して，τ'_i から τ'_{i+1} への変形は，つぎのようである．まず，随伴公理 $\exists x \psi(x) \to \psi(b)$ を τ'_i の根元におく．そして，タブロー規則 $(\to)$ により，$\exists x \psi(x)$ を含む閉じていない枝の先を分岐させ，$\neg \exists x \psi(x)$ と $\psi(b)$ を付け加える．「$\exists x \psi(x)$ を含む」という条件により，$\neg \exists x \psi(x)$ を付けた枝はその瞬間に閉じているので，今後の作業では無視してよい．$\psi(b)$ を付けた枝については，上記の $\exists$ 規則を適用した結果と同じである．したがって，τ_i と τ'_i が同型であるとみなせれば，τ_{i+1} と τ'_{i+1} も同型であるとみなしてよい．

一つ注意しておくと，τ_i に対して，文 $\exists x \psi(x) \to \psi(b)$ を根元におくと，他の定数の条件を壊す可能性がある．たとえば，$\exists x \psi(x) \to \psi(b)$ が b 以外の定数 c を含んでおり，c が τ_i のどこかで新しい変数として導入されていたら，$\exists x \psi(x) \to \psi(b)$ を根元におくことで c の条件が崩れる．しかし，τ'_i には量化記号の規則が使われていないので，その心配は無用である．このとき，b は新しい変数であり，随伴列の条件は満たされている．

つぎに，τ_i から τ_{i+1} への変形が，下のタブロー規則の適用による場合について考える．

$$\frac{\forall x\psi(x)}{\psi(a)}$$

この規則により，$\forall x\psi(x)$ を含む閉じていない枝に対し，その枝に現れるすべての定数 a について $\psi(a)$ を枝の先に加える．何も定数が出現しない枝については，新たな変数 b を一つ選んで $\psi(b)$ を付け加える．

τ'_i から τ'_{i+1} への変形は，つぎのようである．τ_{i+1} で付け加えた $\psi(a_1),\ldots,\psi(a_m)$ に対応するすべての $\forall x\psi(x)\to\psi(a_1),\ldots,\forall x\psi(x)\to\psi(a_m)$，もしくは $\psi(b)$ に対応する $\forall x\psi(x)\to\psi(b)$ を根元におく．後者の場合は，前者の特殊な場合と考えてもよいので，以下では省略する．何回かの規則 $(\to)$ の適用により，$\forall x\psi(x)$ を含む閉じていない枝の先をつぎのように分岐させていく．最初に $\neg\forall x\psi(x)$ と $\psi(a_1)$ に，つぎに $\psi(a_1)$ の先を $\neg\forall x\psi(x)$ と $\psi(a_2)$ に，さらに $\psi(a_2)$ の先を $\neg\forall x\psi(x)$ と $\psi(a_3)$ に，というようにである．枝先に $\neg\forall x\psi(x)$ が付いた枝はその瞬間に閉じてしまう．したがって，τ'_{i+1} でも，$\forall x\psi(x)$ を含む枝の先に $\psi(a_1),\ldots,\psi(a_m)$ が付け加わったとみてよく，それは $\forall$ 規則を適用した結果と同じである．

他の二つの量化記号規則についても同様に扱える．したがって，定理が証明された． ■

続いて，基本定理の一般化について述べる．

定義 3.25 言語 $\mathcal{L}$ における各々の 1 変数論理式 $\psi(x)$ に対して，一つの新しい定数 $c_{\psi(x)}$ を用意し，その定数の全体を $C^1_{\mathcal{L}}$ とおく．つぎの形の文を $\mathcal{L}$ の第一次随伴（量化）公理と呼ぶ．

(1) $\forall x\psi(x)\to\psi(a)$.

(2) $\psi(c_{\neg\psi(x)})\to\forall x\psi(x)$.

(3) $\exists x\psi(x)\to\psi(c_{\psi(x)})$.

(4) $\psi(a)\to\exists x\psi(x)$.

ただし，a は $\mathcal{L}$ の任意の定数である．

とくに，定義 3.25 の (2)，(3) をヘンキン公理 (Henkin axiom) といい，$C^1_{\mathcal{L}}$ の定数をヘンキン定数 (Henkin constant) という．$\mathcal{L}$ の第一次随伴公理は，$\mathcal{L}$ の任意の文に対する随伴公理でもある．

補題 3.26　言語 $\mathcal{L}$ の第一次随伴公理の全体を H_1 とおく．このとき，$\mathcal{L}$ 文の任意の集合 Σ について，

$$\Sigma\text{が充足可能} \iff \Sigma \cup H_1\text{が充足可能}.$$

証明の概略　$\Leftarrow$ は自明．$\Rightarrow$ を証明するには，Σ のモデル $\mathcal{M}$ を $\Sigma \cup H_1$ のモデル $\mathcal{M}'$ に拡張する方法を示せばよく，それは補題 3.22 と同様である．■

定義 3.27　言語 $\mathcal{L}$ にそのヘンキン定数全体 $C^1_{\mathcal{L}}$ を加えた言語を $\mathcal{L}_1$ とする．そして，$\mathcal{L}_1$ にそのヘンキン定数全体 $C^1_{\mathcal{L}_1}$ を加えた言語を $\mathcal{L}_2$ とする．以下同様に $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \ldots$ を定義し，それらの極限を $\tilde{\mathcal{L}} = \bigcup_i \mathcal{L}_i$ とする．また，$\mathcal{L}_i$ の第一次随伴公理を $\mathcal{L}$ の第 i 次随伴公理，または単に $\mathcal{L}$ の随伴公理とも呼ぶ．$\mathcal{L}$ の随伴公理の全体を $H_{\mathcal{L}}$ で表す．

補題 3.28　言語 $\mathcal{L}$ の文の任意の集合 Σ について，

$$\Sigma\text{が充足可能} \iff \Sigma \cup H_{\mathcal{L}}\text{が充足可能}.$$

証明　補題 3.26 から帰納法によって導ける．■

定理 3.29（述語論理の基本定理の一般化）　言語 $\mathcal{L}$ の文の任意の集合 Σ について，

$$\Sigma \models \varphi \iff \varphi\text{は}\Sigma \cup H_{\mathcal{L}}\text{のトートロジー的帰結である}.$$

証明　$\Leftarrow$ は上の補題 3.28 による．実際，$\Sigma \not\models \varphi$ であれば，$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ が充足可能であるから，$\Sigma \cup H_{\mathcal{L}} \cup \{\neg\varphi\}$ も充足可能となり，前提に反する．

$\Rightarrow$ を証明するために，φ が $\Sigma \cup H_{\mathcal{L}}$ のトートロジー的帰結でないとする．すると，$\Sigma \cup H_{\mathcal{L}} \cup \{\neg\varphi\}$ は命題論理の意味で充足可能であり，そのすべての文を真とする真理値関数 V が存在する．この V から，構造 $\mathcal{M} = (M, (c^{\mathcal{M}})_{c \in \tilde{\mathcal{L}}}, (R^{\mathcal{M}})_{R \in \mathcal{L}})$ を以下のように構成する．

M は，$\tilde{\mathcal{L}}$ の定数全体の集合とする．
$c^{\mathcal{M}} = c \quad (c \in \tilde{\mathcal{L}})$,
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathcal{M}} \Longleftrightarrow V(R(a_1, \ldots, a_n)) = \mathrm{T} \quad (R \in \mathcal{L})$.

すると，$\tilde{\mathcal{L}}$ の任意の文 σ に対して，

$$\mathcal{M} \models \sigma \Longleftrightarrow V(\sigma) = \mathrm{T}$$

となることが，σ の複雑さに関する帰納法で簡単にいえる．実際，σ が原子文の場合には上の定義より明らかである．σ の一番外側が命題結合記号の場合は真理値関数 V の定義から，σ の一番外側が量化記号の場合は V が $H_{\mathcal{L}}$ を満たすことからいえる． ■

3.4 演繹体系と完全性定理

ここでは，命題論理のウカシェビッチの公理系を述語論理に拡張した演繹体系を与え，それに対する完全性定理を証明する．その際，前節の基本定理が有効に働く．

P1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

P2. $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$.

P3. $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

P4. $\forall x \varphi(x) \to \varphi(a)$.

注：φ や ψ は任意の論理式を表しているから，正確にいえば，上記は 4 つの公理図式である．以下，公理図式を単に公理と呼ぶ．

論理記号 $\wedge, \vee, \exists$ は省略記号として定義する．すなわち，$\phi \wedge \psi$ は $\neg(\phi \to \neg\psi)$，$\phi \vee \psi$ は $\neg\phi \to \psi$，$\exists x \phi$ は $\neg\forall x \neg\phi$ の略記である．

公理から妥当な方法（推論規則）で生成される命題を「定理」と呼ぶ．正確には，以下のように「定理」を定義する．

定義 3.30　述語論理の定理はつぎのように定義される．

(1) 公理 P1, P2, P3, P4 は定理である．

(2) φ と $\varphi \to \psi$ が定理ならば，ψ も定理である．

(3) $\varphi \to \psi(b)$ が定理で，かつ φ が b を含まなければ，$\varphi \to \forall x\psi(x)$ も定理である．

上記の (2) は，三段論法である．上記の (3) は，全称化 (generalization) という推論規則であり，定数 b をその固有定数 (eigenvariable) と呼ぶことがある．

φ が定理であるとき，$\vdash \varphi$ と書く．P1, P2, P3, P4 以外の公理を仮定するとき，追加する公理（文）の集合 Σ を理論と呼び，Σ において φ が証明されることを，$\Sigma \vdash \varphi$ と書く．ただし，その証明中に現れる全称化規則の固有定数 b は Σ に現れないものとする．容易にわかるように，$\Sigma \vdash \varphi$ であれば，Σ の有限部分集合 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ が存在して，$\vdash (\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) \to \varphi$ である．

こんな簡単な仕組みでも，すべての恒真式が定理として導けることが示せる．この事実が「ゲーデルの完全性定理」である．この定理を一気に証明しようとするとかなり複雑な証明になるが，われわれは，

述語論理の恒真性 ＝ トートロジー ＋ 量化公理

という便利な道具をもっている．すべてのトートロジーが証明できることは，この体系が命題論理の公理系を含み，それが（命題論理として）完全であることからほぼ明らかである．したがって，あとは量化公理について調べればよい．

補題 3.31　文 θ を φ の随伴公理とする．このとき，

$$\vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \theta \to \varphi.$$

証明 $\Rightarrow$ は自明．$\Leftarrow$ を示すために，$\theta \to \varphi$ が証明可能であるとする．θ が $\forall x\psi(x) \to \psi(a)$，あるいは $\psi(a) \to \exists x\psi(x)$ のとき，θ は証明可能であるから，三段論法より φ が証明可能である．

文 θ をヘンキン公理 $\psi(b) \to \forall x\psi(x)$ とする．$(\psi(b) \to \forall x\psi(x)) \to \varphi$ が証明可能であれば，その対偶から $\neg\varphi \to (\psi(b) \land \neg\forall x\psi(x))$ が証明可能であり，したがって $\neg\varphi \to \psi(b)$ と $\neg\varphi \to \neg\forall x\psi(x)$ が証明可能である．前者に対して全称化規則を用いれば，$\neg\varphi \to \forall x\psi(x)$ が証明可能であるから，これと後者より $\neg\varphi \to (\forall x\psi(x) \land \neg\forall x\psi(x))$ が証明可能であり，これより φ が証明可能であることがいえる．

θ が $\exists x\psi(x) \to \psi(b)$ のときも同様に扱える． ■

定理 3.32（ゲーデルの完全性定理） $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi$.

証明 $\Rightarrow$ は，「定理」の定義に関する帰納法による．実際，公理 P1–P4 は明らかに恒真であり，三段論法と全称化は恒真性を保存する．つぎに $\Leftarrow$ を示すために，$\models \varphi$ と仮定する．基本定理から，φ の随伴量化公理列 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ が存在して，$(\theta_1 \land \cdots \land \theta_n) \to \varphi$ がトートロジーになる．トートロジーは証明可能である（命題論理の完全性）から，$\vdash (\theta_1 \land \cdots \land \theta_n) \to \varphi$．すると，上の補題 3.31 から $\vdash \varphi$ を得る． ■

定理 3.33（一般化された完全性定理） $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \models \varphi$.

証明 $\Rightarrow$ は，やはり「定理」の定義に関する帰納法による．$\Leftarrow$ を示すために，$\Sigma \models \varphi$ と仮定する．一般化された基本定理（定理 3.29）と命題論理の一般化された完全性定理（定理 2.26）により，Σ の有限集合 $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ と $H_{\mathcal{L}}$ の有限集合 $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ が存在して，$(\theta_1 \land \cdots \land \theta_n) \to ((\sigma_1 \land \cdots \land \sigma_m) \to \varphi)$ が命題論理の意味で証明可能である．さらに，$\theta_1, \ldots, \theta_n$ の順番を適当に入れ替えることで，これらを $(\sigma_1 \land \cdots \land \sigma_m) \to \varphi$ の随伴列にできる．すると，補題 3.31 をくり返し用いれば，$\vdash (\sigma_1 \land \cdots \land \sigma_m) \to \varphi$，したがって $\Sigma \vdash \varphi$ となる． ■

系 3.34（述語論理のコンパクト性定理） 言語 $\mathcal{L}$ における文の集合 Σ が与えられたとき，その任意の有限部分集合が充足可能であれば，Σ 全体も充足可能である．

証明　対偶を示す．一般化された完全性定理より，Σ が充足不能であれば，矛盾している．すると，証明の有限性から，Σ のある有限部分から矛盾が証明できる．再び，一般化された完全性定理より，その有限部分集合は充足不能である． ■

ここでは，一般化された完全性定理から，コンパクト性定理を導いたが，ゲーデルは反対にコンパクト性定理を用いて完全性定理を一般化した．コンパクト性定理に対する別証明やその応用については，本書第 II 部でくわしく述べられる．

第4章
述語論理の諸性質と一般化

本章では，まずゲンツェンの演繹体系 LK を導入し，タブロー法との関係について説明する．つぎに，LK に関するゲンツェンの基本定理を証明し，それを用いて述語論理の諸性質を導く．最後に，関数記号と等号を導入した体系を考える．

4.1 ゲンツェンの LK

論理の形式化には，公理に重点をおくヒルベルト流と，推論規則に重点をおくゲンツェン流がある．ここでは，シーケント計算とも呼ばれるゲンツェンの演繹体系 LK を導入し，タブロー法との同値性をみよう．

前章のヒルベルト流の公理系で，理論 Σ から論理式 φ が証明できることを $\Sigma \vdash \varphi$ で表したが，体系 LK は有限集合 Γ に対する $\Gamma \vdash \varphi$ をそのまま形式的対象として扱う．さらに，$\vdash$ の右辺にも論理式の集合を許して両辺を対称化することで形式化の強みを発揮させる．

以下では，Γ や Δ で論理式の有限集合を表すが，集合とその要素を並べた列は基本的に同一視する．

定義 4.1 論理式の有限集合 Γ と Δ に対して，$\Gamma \vdash \Delta$ をシーケント (sequent) と呼ぶ．

シーケント $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \vdash \psi_1, \ldots, \psi_n$ が意味するところは，$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \vdash \psi_1 \lor \cdots \lor \psi_n$，すなわち $\vdash (\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_m) \to (\psi_1 \lor \cdots \lor \psi_n)$ と同じである．また，Γ, ψ で $\Gamma \cup \{\psi\}$ を表すが，このとき Γ がすでに ψ を含んでいる可能性を排除しないことに注意されたい．

定義 4.2 シーケント計算 (sequent calculus) LK は，つぎの公理と推論規則からなる．

公理 (axioms)

$$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$$

推論規則 (inference rules)

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \land \psi \vdash \Delta}\ (\land\text{左}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \land \psi}\ (\land\text{右}),$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \lor \psi \vdash \Delta}\ (\lor\text{左}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \lor \psi}\ (\lor\text{右}),$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ (\neg\text{左}), \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{右}),$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ (\to \text{左}), \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi}\ (\to \text{右}),$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(a) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}\ (\forall \text{左}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(b)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}\ (\forall \text{右}),$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(b) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}\ (\exists \text{左}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(a)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}\ (\exists \text{右}),$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta}\ (\text{カット}).$$

ただし，a は任意の定数で，b は Γ, Δ に現れない定数である．また，各規則

の右側に付された (　) 内の記号と文字は，その規則の名前である．

定義 4.3 （LK における）導出木 (derivation tree) は，各節点にシーケント のラベルが付けられた有限木構造（タブローとは上下反対に描く）で，その最上点（葉）には公理のラベルが付けられ，それ以外の節点はその一つ上の節点との間に推論規則の関係が成立するようにラベルが付けられているものとする．そして，$\Gamma \vdash \Delta$ を根とする導出木が存在するとき，その木を $\Gamma \vdash \Delta$ の証明（木）ともいう．

例 4.4 $\varphi \vdash \neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi)$ の証明木を示す．

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \neg\psi, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \psi \vdash \psi}{\varphi \vdash \neg\psi, \psi}\ (\neg右)}{\varphi \vdash \neg\psi, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge右)}{\varphi \vdash \neg\psi \vee (\varphi \wedge \psi)}\ (\vee右)$$

いま，論理式の有限集合 Γ が与えられたとする．Γ の論理式の中で，冠頭に否定をもつもののいくつか（全部でも空でもよい）を選んで $\neg\Delta = \{\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_l\}$ とし，Γ からそれらを除いた集合を $\Gamma' = \Gamma - \neg\Delta$ とおき，また $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_l\}$ とおく．そして，$\Gamma' \vdash \Delta$ を Γ のシーケント表現と呼び，とくに Γ' のすべての論理式が冠頭に否定をもたないときに Γ の標準シーケント表現と呼ぶ．$\Gamma \vdash$ も Γ のシーケント表現の一つである．容易にわかるように，Γ の標準シーケント表現が LK で証明可能であれば，その証明のあとに規則 ($\neg$左) のみを適用して，Γ の任意のシーケント表現の証明をつくることができる．

補題 4.5 Γ が充足不能であれば，Γ の任意のシーケント表現は，LK においてカット規則を使わずに証明可能である．

証明 Γ を充足不能として，Γ の標準シーケント表現が，LK においてカット規則を使わずに証明可能であることをいえばよい．定理 3.16 により，Γ に対する閉タブローが存在するから，それを用いて標準シーケント表現のカット規則なし証明木をつくる．まず構成の概略はつぎのようである．

タブローの各節点に，いま付けられている論理式の代わりに，根からその点に至る道に現れる論理式の集合を付ける．さらに，その集合を標準シーケ

ントに直せば，およそ導出木の上下をひっくり返したものができあがる．正確にはそのまま導出木にはなっていないが，各節点の標準シーケント表現が，カット規則なしに証明可能であることを，帰納的に示すことができる．

それではくわしくみていこう．最初に，タブローの各葉に付けられる論理式の集合について考える．閉タブローでは根から各葉に至る枝は閉じているので，葉に付いた論理式の集合には，ある論理式とその否定が両方含まれる．したがって，それらに対応する標準シーケントは，LK の公理であり，当然カット規則なしにも証明可能である．以下では，いくつか代表的なタブロー規則の適用について調べる．

まず，つぎのタブロー規則

$$\begin{array}{c}\varphi\wedge\psi\\ \hline \varphi\\ \psi\end{array}$$

について考える．つまり，枝 $\mathcal{P}$ に $\varphi\wedge\psi$ が含まれていて，そこに上の規則を適用した結果，φ と ψ を直列に付け加えて，枝 $\mathcal{P}$ を拡張したという場合である．いま Γ を，$\mathcal{P}$ に含まれる論理式の集合，つまり $\mathcal{P}$ の最下端の節点に付けられた集合とする．すると，規則適用後の伸びた枝の最下端に付けられる集合は当然 $\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}$ である．この状態で，タブローの上下をひっくり返せば，

$$\frac{\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}}{\Gamma}$$

となる．ここで重要なことは，Γ が $\varphi\wedge\psi$ を含むことであり，したがって Γ を $\Gamma\cup\{\varphi\wedge\psi\}$ と書いても一般性を失わない．そこで，Γ の標準シーケント表現も $\Gamma',\varphi\wedge\psi\vdash\Delta$ と表せる．すると，$\Gamma',\varphi\wedge\psi,\varphi,\psi\vdash\Delta$ は，$\Gamma\cup\{\varphi,\psi\}$ のシーケント表現である．これは標準表現とは限らないが，帰納法の仮定からその標準シーケント表現がカット規則なしに証明可能であり，これも同様である．したがって，その証明のあとに，推論規則 ($\wedge$左) をつぎの形で適用すればよい．

$$\frac{\Gamma',\varphi\wedge\psi,\varphi,\psi\vdash\Delta}{\Gamma',\varphi\wedge\psi,\varphi\wedge\psi\vdash\Delta}\ .$$

ここで，下式は $\Gamma', \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$ と同じであるから，Γ の標準シーケント表現に対するカット規則なしの証明が得られた．

もう一つ，つぎのようなタブロー規則を考える．

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \qquad \neg\psi}.$$

これは，以下のように変わる．

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi\} \quad \Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\psi\}}{\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi)\}}.$$

$\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi)\}$ の標準シーケント表現を $\Gamma' \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi$ とする．すると，これは，$\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\varphi\}$ の標準シーケント表現 $\Gamma' \vdash \Delta, \varphi \wedge \varphi, \varphi$，および $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \wedge \psi), \neg\psi\}$ の標準シーケント表現 $\Gamma' \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi, \psi$ から推論規則 ($\wedge$右) によって導かれる．このとき，Δ は φ や ψ を含んでいる可能性があるが，それでもこの議論は妥当である．

量化記号についてのタブロー規則を一つ考える．

$$\frac{\exists x\varphi(x)}{\varphi(b)}.$$

ただし，b は新しい定数である．このとき，まず

$$\frac{\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x), \varphi(b)\}}{\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x)\}}$$

となる．$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x)\}$ の標準シーケント表現 $\Gamma', \exists x\varphi(x) \vdash \Delta$ は，$\Gamma \cup \{\exists x\varphi(x), \varphi(b)\}$ のシーケント表現 $\Gamma', \exists x\varphi(x), \varphi(b) \vdash \Delta$ から，推論規則 ($\forall$ 左) によって導かれる．このとき，b は Γ', Δ に現れないことが肝要である．■

上の補題 4.5 から，つぎを得る．

定理 4.6 以下は同値である．

(1) $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能である．

(2) $\Gamma \vdash \Delta$ が LK でカット規則なしに証明可能である．

(3) $\Gamma \models \delta_1 \vee \cdots \vee \delta_n$ （$\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$）．

(4) $\Gamma \cup \{\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n\}$ は充足不能である．

証明　(2) ⇒ (1) は自明．(3) ⇔ (4) も明らかである．(4) ⇒ (2) は補題 4.5 による．あとは (1) ⇒ (3) を示せばよいが，これは証明の高さについての単純な帰納法で証明できる．つまり，公理シーケントは (3) を満たしており，推論規則の上式が (3) を満たせば下式も (3) を満たすことが容易にわかる．■

(1) ⇒ (2) の直接的な証明は，最初にゲンツェンによって与えられ，ゲンツェンの主定理 (Hauptsatz)，あるいはカット除去定理と呼ばれる．これによって，ゲンツェンは LK の無矛盾性をつぎのように示した．いま仮に LK が矛盾しているとして，ある論理式 φ に対し，$\vdash \varphi$ と $\vdash \neg\varphi$ がともに証明可能であるとしよう．これらのシーケントに，(¬左) 規則と（カット）規則を適用すると，空なシーケント $\vdash$ が証明可能になる．すると，カット除去定理によって，空なシーケント $\vdash$ はカットなしでも証明可能である．しかし，カット規則以外に，空な結論を導きうる推論規則はないので，LK が矛盾しているという仮定が否定される．

また，補題 2.28 のように，カット除去定理のタブロー版を証明して，それによって本来のカット除去定理を導く方法もある．

4.2　述語論理の諸性質

述語論理の性質として，本節でとりあげる 3 つの定理はとくに重要である．どれも，主張の簡明さに比して，証明が存外難しい．しかし，そのうちの一つを証明すれば，それを用いて残りは比較的容易に導ける．それぞれの定理にいろいろな証明法が知られているが，本節ではまずクレイグの補間定理を，ゲンツェンの主定理を応用した方法（いわゆる「前原の方法」）で証明する．本来の前原の方法では，シーケントの分割という概念を用いるが，ここでは

それを論理式の集合の分割に置き換えて，議論をさらに簡単にした．シーケントを用いる方法については [Takeuti 1987]，モデルを用いる方法については [田中 2002] を参照．

本節では，論理式の有限集合 Γ と，その（標準）シーケント表現を同一視する．そして，Γ のシーケント表現が LK で証明可能であるとき，集合 Γ は LK で証明可能であるという（これは，Γ が矛盾しているということと同値である）．Γ に対して，$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$，$\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ となる対 (Γ_0, Γ_1) をその分割と呼ぶ．

補題 4.7　文の有限集合 Γ と，その分割 (Γ_0, Γ_1) が与えられ，Γ は LK で証明可能であり，Γ_0 と Γ_1 は LK で証明可能でないとする．このとき，Γ_0 と Γ_1 の両方に現れる定数記号と関係記号だけからなる文 ζ が存在して，$\Gamma_0 \cup \{\neg\zeta\}$ と $\Gamma_1 \cup \{\zeta\}$ はともに LK で証明可能になる．

証明　前節のカット除去定理により，Γ の標準シーケント表現に対するカット規則なし証明木が存在するとして，導出木の構成についての帰納法で証明する．ここで，Γ は空にはなりえないことに注意する．いま，Γ_0 と Γ_1 は Γ の分割で，どちらも LK で証明可能でないとする．Γ_0 も Γ_1 も証明可能だから Γ とは異なるので，どちらも空ではない．

最初に，Γ の標準シーケント表現が公理である場合を考える．このとき，Γ は，ある文 φ とその否定 $\neg\varphi$ を同時に含んでいる．他方，Γ_0 と Γ_1 はどちらも LK で証明可能でないから，一方が φ と $\neg\varphi$ の両方を含むことはない．そこで，もしも Γ_0 が φ を含むなら，ζ を φ とおき，そうでなければ $\neg\varphi$ とおくと，題意が満たされる．

以下では，Γ の標準シーケント表現の証明木において最後に適用される推論規則の種類による場合分けを用いて，帰納法のステップを示す．まず，つぎの推論規則の場合について考える．

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma' \vdash \Delta, \psi}{\Gamma' \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{右}).$$

Γ は $\neg(\varphi \wedge \psi)$ を含むので，その分割 (Γ_0, Γ_1) の一方もそれを含む．いま，Γ_0 が $\neg(\varphi \wedge \psi)$ を含むとし，それを $\neg\varphi$ で置き換えたものを $\Gamma_0^{\neg\varphi}$，$\neg\psi$ で置き換

えたものを $\Gamma_0^{\neg\psi}$ とおく．

まず，$\Gamma_0^{\neg\varphi}$ が LK で証明可能でないとする．$\Gamma_0^{\neg\varphi}$ と $\Gamma_1 - \{\neg\varphi\}$ は（Γ の $\neg(\varphi \wedge \psi)$ を $\neg\varphi$ で置き換えたものの）分割で，どちらも LK で証明可能でないから，帰納法の仮定によって，分割の両方に現れる記号だけからなる文 ζ_0 が存在して，

(1) $\Gamma_0^{\neg\varphi} \cup \{\neg\zeta_0\}$

(2) $(\Gamma_1 - \{\neg\varphi\}) \cup \{\zeta_0\}$

がともに LK で証明可能になる．さらに，$\Gamma_0^{\neg\psi}$ も証明できなければ，同様に制限された記号だけからなる文 ζ_1 が存在して，

(3) $\Gamma_0^{\neg\psi} \cup \{\neg\zeta_1\}$

(4) $(\Gamma_1 - \{\neg\psi\}) \cup \{\zeta_1\}$

がともに LK で証明可能になる．(1) から，$\Gamma_0^{\neg\varphi} \cup \{\neg(\zeta_0 \vee \zeta_1)\}$ が LK で証明可能になる．同様にして，(3) から，$\Gamma_0^{\neg\psi} \cup \{\neg(\zeta_0 \vee \zeta_1)\}$ が LK で証明可能になる．これらに規則 ($\wedge$右) を適用すれば，$\Gamma_0 \cup \{\neg(\zeta_0 \vee \zeta_1)\}$ が LK で証明可能になる．また，(2) と (4) から，$\Gamma_1 \cup \{\zeta_0 \vee \zeta_1\}$ が LK で証明可能になる．したがって，ζ を $\zeta_0 \vee \zeta_1$ とおけば題意が満たされる．もしも，$\Gamma_0^{\neg\psi}$ が証明可能であれば，これと (1) を用いて $\Gamma_0 \cup \{\neg\zeta_0\}$ も証明可能になるので，ζ を ζ_0 とおけばよい．逆に，$\Gamma_0^{\neg\varphi}$ が証明できて，$\Gamma_0^{\neg\psi}$ が証明できなければ，ζ を ζ_1 とおけばよい．$\Gamma_0^{\neg\varphi}$ と $\Gamma_0^{\neg\psi}$ が両方証明可能であれば，Γ_0 も証明可能であるので仮定に反する．

他の命題結合記号についてもほぼ同様に扱えるので，あとは量化記号の推論規則について考える．$\neg\forall x\varphi(x) \in \Gamma$ とし，Γ の証明木における最後の推論規則を

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta, \varphi(b)}{\Gamma' \vdash \Delta, \forall x\varphi(x)}\ (\forall\text{右})$$

とする．いま，$\neg\forall x\varphi(x) \in \Gamma_0$ とし，それを $\neg\varphi(b)$ で置き換えたものを $\Gamma_0^{\neg\varphi(b)}$ とする．Γ_0 が LK で証明可能でないので，$\Gamma_0^{\neg\varphi(b)}$ も LK で証明可能でない．すると，帰納法の仮定により，$\Gamma_0^{\neg\varphi(b)}$ と Γ_1 の両方に現れる記号のみからなる文 ζ が存在して，$\Gamma_0^{\neg\varphi(b)} \cup \{\neg\zeta\}$ と $\Gamma_1 \cup \{\zeta\}$ はともに LK で証明可能になる．b は Γ に含まれないので，Γ_1 にも含まれない．したがって，ζ は b を含

んでおらず，$\Gamma_0^{\neg\varphi(b)} \cup \{\neg\zeta\}$ から，$\Gamma_0 \cup \{\neg\zeta\}$ が証明できる．また，ζ は Γ_0 と Γ_1 の記号のみからなるので，題意を満たす．

最後に，$\forall x\varphi(x) \in \Gamma$ として，つぎの推論規則について考える．

$$\frac{\Gamma', \varphi(a) \vdash \Delta}{\Gamma', \forall x\varphi(x) \vdash \Delta}\ (\forall\,\text{左}).$$

$\forall x\varphi(x) \in \Gamma_0$ とし，それを $\varphi(a)$ で置き換えたものを $\Gamma_0^{\varphi(a)}$ とする．Γ_0 が LK で証明可能でないので，$\Gamma_0^{\varphi(a)}$ も LK で証明可能でない．帰納法の仮定により，$\Gamma_0^{\varphi(a)}$ と Γ_1 の両方に現れる記号のみからなる文 ζ_0 が存在して，$\Gamma_0^{\varphi(a)} \cup \{\neg\zeta_0\}$ と $\Gamma_1 \cup \{\zeta_0\}$ はともに LK で証明可能になる．a が ζ_0 に含まれていない場合は，ζ を ζ_0 とおいて，ただちに題意が満たされる．a が ζ_0 に含まれていても，a が Γ_0 にも含まれている場合は，同様に ζ を ζ_0 とおけばよい．そこで，a が Γ_0 に含まれておらず，ζ_0 に含まれているとしよう．まず，$\Gamma_0^{\varphi(a)} \cup \{\neg\zeta_0(a)\}$ から，$\Gamma_0 \cup \{\neg\zeta_0(a)\}$ は証明可能である．a は Γ_0 に含まれないので，推論規則 ($\forall$ 右) によって，$\Gamma_0 \cup \{\neg\forall y\zeta_0(y)\}$ は証明可能である．他方，推論規則 ($\forall$ 左) によって，$\Gamma_1 \cup \{\forall y\zeta_0(y)\}$ も証明可能である．したがって，ζ を $\forall y\zeta_0(y)$ とおけばよい． ■

定理 4.8（クレイグの補間定理 (Craig's interpolation theorem)） 文 $\varphi \to \psi$ が証明可能であるとする．φ と ψ とが共通の関係記号を含むときは，φ と ψ の共通の記号だけからなる ζ が存在して，$\varphi \to \zeta$ と $\zeta \to \psi$ がともに証明可能である．φ と ψ とが共通の関係記号を含まないときは，$\neg\varphi$ か ψ が証明可能である．

証明 文 $\varphi \to \psi$ が証明可能であれば，$\Gamma = \{\varphi, \neg\psi\}$ が LK で証明可能である．まず，$\Gamma_0 = \{\varphi\}$，$\Gamma_1 = \{\neg\psi\}$ とおいて，Γ_0 も Γ_1 も LK で証明可能でない場合を考える．このとき，上の補題から，φ と ψ の共通記号からなる ζ が存在して，$\{\varphi, \neg\zeta\}$ と $\{\neg\psi, \zeta\}$ がともに LK で証明可能である．したがって，φ と ψ は必ず共通の関係記号を含んでおり，定理の後半の主張の対偶が成り立っている．あとは，φ と ψ とが共通の関係記号を含んでいるとして，さらに $\neg\varphi$ か ψ が証明可能になる場合に，定理の前半を示せばよい．共通の記号

から，真を表す文 T をつくる．たとえば，φ と ψ が $R(x)$ を含む場合は，T を $\forall x(R(x) \lor \neg R(x))$ とおく．$\neg\varphi$ が証明可能でなければ，$\varphi \to \mathrm{T}$ と $\mathrm{T} \to \psi$ が証明可能になるので，ζ を T とすればよい．ψ が証明可能でなければ，同様に ζ を $\neg\mathrm{T}$ とすればよい． ■

Σ を文の集合として，Σ が含む数学的記号の集合を $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ とする．そして，$\mathcal{S}$ に属する n 変数の関係記号を一つ選んで R とし，$\mathcal{S}$ は R 以外にも関係記号を含むものと仮定する．このとき，R が，Σ において陽定義可能 (explicitly definable) であるとは，R を含まない $\mathcal{S}$ 論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ が存在して，

$$\Sigma \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

となることである．また，R が，Σ において陰定義可能 (implicitly definable) であるとは，Σ に現れる記号 R をすべて新しい記号 R' に置き換えたものを Σ' として，

$$\Sigma \cup \Sigma' \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow R'(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

となることである．

定理 4.9（ベートの定義可能性定理 (Beth's definability theorem)） R が Σ において陽定義可能であることと，Σ において陰定義可能であることは同値である．

証明 まず，R が Σ において陽定義可能であるとする．このとき，R を含まない論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ が存在して，

$$\Sigma \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

となる．Σ に現れる記号 R を記号 R' に置き換えたものを Σ' とすると，明らかに

$$\Sigma' \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R'(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

だから，

$$\Sigma \cup \Sigma' \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow R'(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

となる．すなわち，R は Σ において陰定義可能である．

つぎに，R が Σ において陰定義可能であるとする．すなわち，

$$\Sigma \cup \Sigma' \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow R'(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

である．証明の有限性から，有限集合 $\Gamma \subset \Sigma$ と $\Gamma' \subset \Sigma'$ が存在して，

$$\Gamma \cup \Gamma' \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow R'(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

となる．このとき，Γ の記号 R を R' に置き換えたものが Γ' であると仮定しても一般性を失わない．

さて，$b_0, \ldots b_{n-1}$ を Γ に含まれない相異なる定数とする．シーケント

$$\Gamma, \Gamma', \neg R(b_0, \ldots, b_{n-1}) \vdash \neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

は証明可能であり，その分割として，$\Gamma \cup \{\neg R(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ と $\Gamma' \cup \{\neg\neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ を考える．もしも $\Gamma \cup \{\neg R(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ が LK で証明可能であれば，$\Gamma \vdash R(b_0, \ldots, b_{n-1})$，したがって $\Gamma \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1} R(x_0, \ldots, x_{n-1})$ である．いま，R 以外の $\mathcal{S}$ の記号で，真を表す文 T をつくれば，$\Gamma \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow \mathrm{T})$ であるから，R は Γ において，したがって Σ において陽定義可能である．$\Gamma' \vdash \neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1})$ が証明可能であるときも同様である．

そこで，$\Gamma \cup \{\neg R(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ と $\Gamma' \cup \{\neg\neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ の両方が証明可能でないとする．このとき，補題 4.7 より，両方に現れる記号からなる文 $\zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})$ が存在して，$\Gamma' \cup \{\neg\neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1}), \neg\zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ と $\Gamma \cup \{\neg R(b_0, \ldots, b_{n-1}), \zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})\}$ とがともに LK で証明可能になる．前者から，

$$\Gamma' \vdash \neg R'(b_0, \ldots, b_{n-1}) \vee \zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

を得る．ここで，ζ は R や R' を含まないので，R' を R に置き換えて，

$$\Gamma \vdash \neg R(b_0, \ldots, b_{n-1}) \vee \zeta(b_0, \ldots, b_{n-1}).$$

また，後者からは，

$$\Gamma \vdash R(b_0, \ldots, b_{n-1}) \vee \neg\zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

が導ける．したがって，

$$\Gamma \vdash R(b_0, \ldots, b_{n-1}) \leftrightarrow \zeta(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

であり，$b_0, \ldots, b_{n-1}$ は Γ に含まれないので，

$$\Gamma \vdash \forall x_0, \ldots, x_{n-1}(R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow \zeta(x_0, \ldots, x_{n-1}))$$

が証明可能であり，R が Σ において陽定義可能である． ■

定理 4.10（ロビンソンの合併無矛盾性定理 (Robinson's joint consistency theorem)） $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1$ として，Σ を $\mathcal{L}$ 文の完全集合（すなわち，任意の $\mathcal{L}$ 文 σ について，$\Sigma \vdash \sigma$ か $\Sigma \vdash \neg\sigma$ が成り立つ）とする．さらに，$\mathcal{L}_0$ 文の集合 $\Sigma_0 \supset \Sigma$ と $\mathcal{L}_1$ 文の集合 $\Sigma_1 \supset \Sigma$ をとる．このとき，$\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ が無矛盾であるための必要十分条件は，Σ_0 と Σ_1 がそれぞれ無矛盾になることである．

証明 必要性は明らかなので，十分性を示す．いま，Σ_0 と Σ_1 がそれぞれ無矛盾で，$\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ が矛盾していると仮定する．証明の有限性により，有限集合 $\Gamma_0 \subset \Sigma_0$ と $\Gamma_1 \subset \Sigma_1$ が存在して，$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ が LK で証明できる．Γ_0 と Γ_1 は証明できないから，補題 4.7 より，$\mathcal{L}$ 文 ζ が存在して，$\Gamma_0 \cup \{\neg\zeta\}$ と $\Gamma_1 \cup \{\zeta\}$ が LK で証明できる．したがって，$\Sigma_0 \vdash \zeta$ と $\Sigma_1 \vdash \neg\zeta$ が成り立つ．Σ は完全だから，$\Sigma \vdash \zeta$ か $\Sigma \vdash \neg\zeta$ が成り立つ．$\Sigma \vdash \zeta$ であれば，$\Sigma_1 \supset \Sigma$ から $\Sigma_1 \vdash \zeta$ となって，Σ_1 が矛盾する．同様に，$\Sigma \vdash \neg\zeta$ であれば，Σ_0 が矛盾する． ■

4.3 等号をもつ論理体系

本節では，等号 $=$ を原始的な関係記号としてもつ論理体系を扱う．原始的というのは，言語 $\mathcal{L}$ の選択に依存せず，論理記号などと一緒にあらかじめ与

えられているということである．

原子論理式の定義は，以下のようになる．

定義 4.11 つぎの二つの形の記号列を言語 $\mathcal{L}$ の原子論理式と呼ぶ．

$$s = t, \qquad R(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

ここで，s, t および $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ は $\mathcal{L}$ の定数もしくは変数，R は $\mathcal{L}$ の n 項関係記号である．

等号に関する公理には，以下のようなものがある．

定義 4.12 以下の文を等号に関する公理と呼ぶ．

Eq_0: $\forall x(x = x) \wedge \forall x \forall y(x = y \to y = x) \wedge \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \to x = z)$.

$\mathcal{L}$ に属する各記号 R について，

$\mathrm{Eq}(R)$: $\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{n-1}(x_0 = y_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \to R(y_0, \ldots, y_{n-1}))$.

これらをあわせて，Eq とおく．

等号 $=$ をもった構造の性質を定める．

定義 4.13 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ が正規 (normal) であるとは，$=$ の解釈が M 上の真の等号になるものをいう．

正規構造は等号に関する公理 Eq を満たすが，逆は必ずしも正しくない．しかし，つぎがいえる．

補題 4.14 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ が等号に関する公理 Eq を満たすとする．このとき，正規な構造 $\tilde{\mathcal{M}}$ および，$\tilde{\mathcal{M}}$ から $\mathcal{M}$ への埋め込み写像 h が存在して，$\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_i)$ と，任意の $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_i \in |\tilde{\mathcal{M}}|$ について，

$$\tilde{\mathcal{M}} \models \varphi(\tilde{a_1}, \ldots, \tilde{a_i}) \iff \mathcal{M} \models \varphi(h(\tilde{a_1}), \ldots, h(\tilde{a_i})).$$

証明　等号に関する公理 Eq を満たす $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ が与えられたとする．各 $a \in M = |\mathcal{M}|$ に対して，$[a] = \{b \in M : \mathcal{M} \models a = b\}$ とおく．さらに，各 $c, R \in \mathcal{L}$ に対して，

$$\tilde{c} = [c^{\mathcal{M}}],$$

$$\tilde{R}([a_1], \ldots, [a_n]) \Longleftrightarrow R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$$

とする．$\mathcal{M}$ が Eq を満たすことから，$\tilde{R}$ の定義が代表元の選び方によらない妥当なものであることがわかる．そこで，

$$\tilde{\mathcal{M}} = (\{[a] : a \in M\}, \tilde{c}, \ldots, \tilde{R}, \ldots)$$

とおく．すると，$\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_i)$ について，

$$\tilde{\mathcal{M}} \models \varphi([a_1], \ldots, [a_i]) \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_i)$$

となることが，φ の複雑さに関する帰納法によって簡単に導かれる．したがって，各 $[a]$ から任意に代表元を選ぶ関数を h とおけば，題意が満たされる．■

つぎは，補題 4.14 から明らかである．

補題 4.15　$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ に対して，

$$\Sigma \cup \mathrm{Eq}\ \text{が充足可能} \Longleftrightarrow \Sigma\text{が正規モデルをもつ．}$$

定義 4.16　$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が与えらえたとき，そのすべての正規モデルが文 φ を満たすとき，つぎのように書く．

$$\Sigma \models' \varphi.$$

定理 4.17（等号をもつ述語論理の完全性定理）　$\Sigma \cup \mathrm{Eq} \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \models' \varphi.$

証明　まず $\Sigma \cup \mathrm{Eq} \models \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \models' \varphi$ を示せば，あとは等号なしの完全性定理からいえる．$\Rightarrow$ は，Σ の正規モデルは $\Sigma \cup \mathrm{Eq}$ を満たすことから明らか．$\Leftarrow$ を示すために，$\Sigma \cup \mathrm{Eq} \not\models \varphi$ とする．すると，$\Sigma \cup \mathrm{Eq} \cup \{\neg\varphi\}$ は充足可能であり，補題 4.15 から $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ は正規モデルをもち，$\Sigma \not\models' \varphi$ となる．■

系 4.18（等号をもつ述語論理のコンパクト性定理） 言語 $\mathcal{L}$ における文の集合 Σ が与えられたとき，その任意の有限部分集合が正規モデルをもてば，Σ 全体も正規モデルをもつ．

証明 Σ の任意の有限部分集合が正規モデルをもてば，補題 4.15 より $\Sigma \cup \mathrm{Eq}$ の任意の有限部分集合もモデルをもつ．等号なしの完全性定理から，$\Sigma \cup \mathrm{Eq}$ は充足可能であり，再び補題 4.15 により，Σ 全体も正規モデルをもつ． ■

ふつうの数学的議論では，等号は論理記号と同様に，(理論の外で）最初から与えられているものとしている．このとき Eq は論理的な公理と同様に暗黙に仮定され，正規な構造を単に構造と呼んでいる．現在のロジックでも，多くの場合には $\models$ で上の $\models'$ を表し，$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi$ と書いて定理 4.17 を表すのが一般的である．

4.4 関数記号の導入

本節では，等号をもつ論理体系に関数記号を導入することを考える．関数を関係の一種として扱うことも可能ではある（例 3.4 を参照）が，関数本来の形のまま扱えるように言語を拡張したい．

定義 4.19 （拡張された）述語論理の言語 (language, signature) $\mathcal{L}$ は，関数記号 f_i と関係記号 R_j のリストである．

$$\mathcal{L} = (f_0, f_1, \ldots; R_0, R_1, \ldots).$$

この記号リストは，可算無限のような書き方をしているが，有限でもよいし，非可算でもよい．また，各関数記号 f と各関係記号 R には，あらかじめ元数（引数の個数）が定められており，それを明示したい場合には $f(x_1, \ldots, x_m)$ や $R(x_1, \ldots, x_n)$ で表す．このとき，f は m 変数関数，R は n 項関係という．定数 (constant) は 0 個の変数をもつ関数記号として扱う．

変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ と言語 $\mathcal{L}$ の関数記号を適当に合成してできる記号列を $\mathcal{L}$ の項 (term) という．正確な定義は以下の通りである．

定義 4.20 言語 $\mathcal{L}$ の項はつぎのように定義される．

(1) 変数 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ は，言語 $\mathcal{L}$ の項である．

(2) f を $\mathcal{L}$ の m 変数関数記号とし，$t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}$ を $\mathcal{L}$ の項とするとき，$f(t_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$ は $\mathcal{L}$ の項である．

項 t に含まれるいくつかの変数（たとえば x, y）に注目して，$t(x, y)$ のように記すことがある．そして，項 $t(x)$ に現れる変数記号 x をすべて項 s に置き換えてできる項を $t(s)$ のように表す．また，慣習に従って，2 変数関数 $f(x, y)$ は xfy のようにも表す．たとえば，$+(x, y)$ を $x + y$ と書く．変数を含まない項は，閉項と呼ばれる．

論理式の定義も以下のように一般化される．

定義 4.21 言語 $\mathcal{L}$ の論理式をつぎのように定義する．

(1) つぎの形の記号列を（原子）論理式と呼ぶ．

$$s = t, \quad R(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

ここで，s, t および $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ は $\mathcal{L}$ の項，R は $\mathcal{L}$ の n 項関係記号である．

(2) φ と ψ を言語 $\mathcal{L}$ の論理式，x を変数記号として，

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \to (\psi),\ \forall x(\varphi),\ \exists x(\varphi)$$

は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である（カッコは適当に省略してよい）．

構造の定義も一般化される．

定義 4.22 言語 $\mathcal{L}$ における構造または $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ は，つぎのものからなる．

(1) 空でない集合 $M = |\mathcal{M}|$．これを $\mathcal{M}$ の領域または宇宙と呼ぶ．

(2) 各 m 変数関数記号 $f \in L$ に対して，M 上の関数 $f^{\mathcal{M}} : M^m \to M$.

(3) 各 n 項関係記号 $R \in L$ に対して，M 上の関係 $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

この構造を $\mathcal{M} = (M; f_0^{\mathcal{M}}, f_1^{\mathcal{M}}, \cdots; R_0^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \cdots)$ と表す．誤読が生じない場合には，仕切り記号としてセミコロン; の代わりにコンマ, を用い，右肩の $\mathcal{M}$ を省略する．

例 4.23 $\mathcal{L}_{\mathrm{or}} = (+, \cdot, 0, 1; <)$（順序環の言語）とする．自然数論の標準構造 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; +, \cdot, 0, 1; <)$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ 構造である．構造の中の $+, \cdot, 0, 1; <$ は，自然数上の通常の関数や関係を表しており，言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ の記号そのものとは本来区別すべきものである．

定義 4.24 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．$\mathcal{L}$ の閉項 t に対し，$\mathcal{M}$ におけるその値 $t^{\mathcal{M}}$ を項の構成に関する帰納法によって以下のように定める．

閉項 $t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}$ の値を $t_0^{\mathcal{M}}, t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{M}}$ とするとき，項 $f(t_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$ の値は $f^{\mathcal{M}}(t_0^{\mathcal{M}}, t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{M}})$ によって定まる $|\mathcal{M}|$ の要素である．

原子文に対する真偽をつぎのように定める．

定義 4.25 $\mathcal{M}$ を言語 $\mathcal{L}$ における構造とする．

R を $\mathcal{L}$ の n 項関係記号とし，$t_0, \ldots, t_{n-1}$ を変数を含まない項として，$R^{\mathcal{M}}(t_0^{\mathcal{M}}, \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{M}})$ が成り立つならば，原子論理式 $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$ は $\mathcal{M}$ において真 (true) であり，そうでなければ偽 (false) であるという．

一般の文に対する真偽は，定義 3.7 と同様に，タルスキの真理条項で定める．モデルや充足可能性についても，定義 3.9 と同じである．等号に関する公理 Eq には，関数記号 $f \in \mathcal{L}$ に対する

$$\mathrm{Eq}(f)\colon\ \forall x_0 \ldots \forall x_{m-1} \forall y_0 \ldots \forall y_{m-1}(x_0 = y_0 \land \cdots \land x_{m-1} = y_{m-1} \to f(x_0, \ldots, x_{m-1}) = f(y_0, \ldots, y_{m-1}))$$

を加える．すると，補題 4.14 と同様にして，Eq を満たす構造は正規構造に変形できるので，結局関数記号を加えた述語論理においても完全性定理（定理 4.17）が成り立つ．

タブロー法，ヒルベルト流公理系，シーケント計算 LK に関数記号を加えるためには，公理や規則を定める文面において，“任意の定数 a” を “任意の項 t” に置き換えればよい（Eq もそれぞれにあわせた形式化が可能であるが，ここでは省略する）．たとえば，量化記号に関するタブロー規則は，以下のようになる．

$$\frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi(t)},\qquad \frac{\exists x\varphi(x)}{\varphi(b)},\qquad \frac{\neg\forall x\varphi(x)}{\neg\varphi(b)},\qquad \frac{\neg\exists x\varphi(x)}{\neg\varphi(t)}$$

ただし，t は任意の項で，b は新しい定数を表す．

表面上は定数 a を項 t に変更しただけであるが，その及ぼす影響は予想以上に大きい．たとえば，あるタブローにおいて文 $\forall x\varphi(x)$ に規則を適用しようとする場合，それを含む枝に項 $f(a)$ が現れているとすれば，$\varphi(f(a))$ を枝先に付加するだけでなく，定数 a と関数記号 $f(x)$ でつくられるすべての閉項 $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots$ を $\varphi(x)$ に代入してみる必要がある．といっても，それを一度にすべて行うわけにはいかないので，ステップ数などを助変数に用いて，代入する項の個数をコントロールすることになる．これにより，閉タブローが存在するなら，必ずそれがつくられ，存在しないときは，モデルの情報を与える枝をもつタブローがつくられるようにすることは可能である．しかし，定理 3.20（$\forall$ 文に関する決定可能性）はもはや成り立たない．

シーケント計算 LK についても影響は大きい．カット除去定理，クレイグの補間定理などの主要定理は，関数記号をもつ体系に対しても結果的には成り立つが，これまでの議論を単純に書き換えるだけではすまない．それらの一般論については，文献 [Troelstra and Schwichteberg 2000] などを参照．なお，関数記号の導入によって大きな影響を受けるのは形式体系についての議論であり，モデルに関する議論はあまり変わらない．

付録
スコーレムの標準形とエルブランの定理

この付録では，ゲーデルと同時代に活躍したスコーレムとエルブランの仕事を紹介する．スコーレムは形式的演繹体系に関心が薄く，エルブランは形式体系にしか興味がなかったために，二人とも完全性定理の発見には至らなかったが，両者の仕事をあわせると，完全性定理に対して，ゲーデルの証明よりも情報量の多い結果が得られる．つまり，後者では恒真式に対する証明の存在が主張されるだけなのに対し，スコーレム・エルブランの議論には証明の構成も含まれているのである．もっともそのような解釈は 20 世紀後半のものである．

すべての議論の出発点になるのはスコーレムの標準形 (1920) であり，これはゲーデルの証明についても同様である．付言すると，彼らは標準形をつくるのに，関数記号でなく関係記号を用いているのだが，ここでは現代の標準的な教程にあわせて，関数記号を用いた標準形を扱う．

まず，つぎの定義から始める．

定義 1　量化記号を含まない論理式 φ の前に量化記号を付けた論理式 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\varphi$ を冠頭標準形，PNF (prenex normal form) という．ここで，Q_i は量化記号（$\forall$ または $\exists$）を表す．

定理 2　任意の論理式 φ に対して，それと同値な PNF 論理式 φ' が存在する．すなわち，$\varphi \leftrightarrow \varphi'$ は，恒真かつ証明可能である．

証明の概略　与えられた論理式に対して，命題結合記号の内側に入った量化記号を外側に送り出す手続きを考える．たとえば，$\wedge$ と $\forall x$ の入れ換えは以下のようである．θ が x を自由変数にもたないときには，

$$\theta \wedge \forall x \xi(x) \leftrightarrow \forall x(\theta \wedge \xi(x))$$

が恒真かつ証明可能である．もし，θ が x を自由変数にもつ場合は，それに含まれない新しい変数を y として，

$$\theta \wedge \forall x \xi(x) \leftrightarrow \forall y(\theta \wedge \xi(y))$$

である．他の論理記号の組合せについても，ほとんど同様な仕方で量化記号を外側に送り出すことが可能である．■

PNF 論理式は，同一の変数に対する量化記号を複数含まないものと約束しておく．すなわち，$\cdots Qx \cdots Q'x \cdots \varphi$ において，外側の Qx は無意味であるから，自動的に消去するものとする．

定義 3　論理式 φ の PNF $\varphi' \equiv Q_1x_1Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\theta$ に対し，以下の作業をくり返して最終的に得られる $\forall$ 論理式を φ のスコーレム標準形，SNF (Skolem normal form) と呼ぶ．

(1) 存在記号がなければ終了．

(2) 一番左の存在記号を Q_i とする．Q_ix_i を消去して，それ以外に出現する x_i には $f(x_1, \ldots, x_{i-1})$ を代入する．ここで，f は新しい関数記号であり，スコーレム関数と呼ばれる．

たとえば，$\forall w \exists x \forall y \exists z \theta(w, x, y, z)$ に対しては，まず $\exists x$ を消去し，x に $f(w)$ を代入して，

$$\forall w \forall y \exists z \theta(w, f(w), y, z)$$

とする．さらに，$\exists z$ を消去し，z に $g(w, y)$ を代入して，

$$\forall w \forall y \theta(w, f(w), y, g(w, y))$$

を得る．これは $\forall$ 論理式であり，SNF である．

定理 4　論理式 φ の SNF を φ^S とすれば，φ が充足可能 $\Longleftrightarrow$ φ^Sが充足可能である．

証明の概略　厳密には存在記号の個数について帰納法を用いるが，ここでは一つの具体例で考える．$\forall w \exists x \forall y \exists z \theta(w,x,y,z)$ がモデル $\mathcal{M}$ をもつとすれば，そのモデルの上で $\forall w \forall y \theta(w, f(w), y, g(w,y))$ を成り立たせるように関数 $f^{\mathcal{M}}(w)$ および $g^{\mathcal{M}}(w,y)$ を定義することができる（選択公理を使用）．したがって，$\Rightarrow$ が証明された．逆は明らか．■

論理式 φ と SNF 論理式 φ^S の同値性は一般にいえない．$\varphi^S \to \varphi$ はつねにいえるが，$\varphi \to \varphi^S$ はつねには成り立たない．

定理 5　論理式 φ が構造 $\mathcal{M}$ で成り立てば，ある可算の部分構造 $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ でも成り立つ．

証明の概略　φ のスコーレム関数を $f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ $(1 \leq i \leq n)$ とする．SNF 論理式 φ^S のモデルを $\mathcal{M}$ とし，$|\mathcal{M}|$ の元 a を任意に選んで，スコーレム関数の解釈 $f_i^{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_{k_i})$ をくり返し適応して得られる元の全体を M' とする．つまり，$a \in M'$ であり，任意の $i \leq n$ と M' の任意の元 $a_1, \ldots, a_{k_i}$ に対し，$f_i^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_{k_i}) \in M'$ となる最小の集合が M' である．すると，M' の元はつくられる順に並べられるので高々可算である．$\mathcal{M}$ の領域を M' に制限してできる構造を $\mathcal{M}'$ とする．φ^S は $\forall$ 論理式であるから，$\mathcal{M}$ で成り立てば，$\mathcal{M}'$ でも成り立つ．したがって，φ も $\mathcal{M}'$ で成り立つ．■

上の定理において，論理式 φ を論理式の可算集合に置き換えても，同様な証明が可能である．この主張を一般にレーヴェンハイム・スコーレムの定理 (Löwenheim-Skolem theorem) という．

スコーレムは，自らの証明 (1920) が選択公理を用いた超越的な論法になっていることを好まず，自然数をベースにしてモデルを具体的に構成する方法を考案した (1923)．そして，その考えをさらに徹底して，のちにエルブランモデルと呼ばれるものと類似した構造を導入した (1928)．

ここで，技術的な約束として，以下で扱うどの言語$\mathcal{L}$も，少なくとも一つの定数をもつものとする．$\mathcal{L}$の閉項（変数をもたない項）の全体Uを$\mathcal{L}$のエルブラン領域と呼ぶ．さらに，U上で$\mathcal{L}$の各記号の解釈をつぎのように定めることで，エルブラン構造$\mathfrak{U}$を定義する．$t_1, \ldots, t_n \in U$について，

$$f^{\mathfrak{U}}(t_1, \ldots, t_n) = \text{“}f(t_1, \ldots, t_n)\text{”}.$$

関係記号の解釈については何も制約はないが，等号$=$だけは特別な扱いが必要なので，まずは等号が入らない論理を考える．

つぎの補題が成り立つ．

補題 6　Σを量化記号と等号を含まない（$\mathcal{L}$の）文の集合とする．このとき，以下の3条件は同値である．

(1) Σは述語論理の意味で充足可能，すなわちΣはモデルをもつ．

(2) Σは（原子文を原子命題とみなし）命題論理の意味で充足可能．

(3) Σは（$\mathcal{L}$の）エルブラン構造をモデルをもつ．

証明　$1 \Rightarrow 2$は，真理値関数の定義（定義2.3と定義3.7）から明らか．$2 \Rightarrow 3$を示すために，Σのすべての命題を真にする真理値関数Vの存在を仮定する．そして，エルブラン構造$\mathfrak{U}$における関係記号Rの解釈を以下のように定める．$t_1, \ldots, t_n \in U$について，

$$R^{\mathfrak{U}}(t_1, \ldots, t_n) \Longleftrightarrow V(R(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{T}.$$

すると，論理式の複雑さに関する帰納法によって，Vで真となる文はすべて$\mathfrak{U}$で成り立つことがいえる．とくに，$\mathfrak{U}$はΣのモデルになる．最後に，$3 \Rightarrow 1$は自明である．■

文σを構成する数学的記号の集合を$\mathcal{L}(\sigma)$で表す．つまり，σは，言語$\mathcal{L}(\sigma)$の文である．略記法として，同類のものを有限個並べた列をベクトル表記で$\vec{t}$のように表す．たとえば，$\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$は，$\exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$と略記する．また，$\exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$が$\exists$文であるというときには，$\varphi(\vec{x})$は量化記号を含まないものと約束する．

定理 7 等号を含まない述語論理において，ヨ文 $\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ が恒真であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\varphi)$ のエルブラン領域 U の要素の組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーになることである．ただし，$\mathcal{L}(\varphi)$ が定数をもたない場合は，U に新しい定数を一つ加えるものとする．

注：この定理はヨ文が恒真であるための必要十分条件を与えたものだが，後述（定理 11）のように証明可能であるための必要十分条件もまったく同様に与えられる．

証明 最初に，十分性を示す．トートロジー $\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \varphi(\vec{t_k})$ は述語論理においても恒真である．また，$\varphi(\vec{t_i}) \to \exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ も恒真であるから，$\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ は恒真である．

必要性を対偶で示すために，エルブラン領域 U の要素のどのような組 $\vec{t_i}$ $(i < k)$ に対しても，$\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーでないとする．このとき，$\neg\varphi(\vec{t_1}) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi(\vec{t_k})$ は命題論理の意味で充足可能である．すると，命題論理のコンパクト性定理により，$\Sigma = \{\neg\varphi(\vec{t}) : \vec{t} \in U^n\}$ は命題論理の意味で充足可能である．補題 6 から，Σ はエルブラン構造 $\mathfrak{U}$ をモデルにもつ．Σ の定義から $\mathfrak{U} \models \neg\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ となるから，与えられたヨ文 $\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ は恒真でない． ■

定理 8（スコーレムの基本定理） 等号を含まない述語論理において，文 σ の SNF σ^S を $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ とする．このとき，$\neg\sigma$ が恒真であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\varphi)$ のエルブラン領域 U の要素の組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\neg\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \neg\varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーになることである．ただし，$\mathcal{L}(\varphi)$ が定数をもたない場合は，U に新しい定数を入れるものとする．

証明 $\models \neg\sigma \iff \sigma$ は充足不能 $\iff \sigma^S$ 充足不能 $\iff \models \neg\sigma^S$．あとは，定理 7 による． ■

例 9 $\exists w\forall x\exists y\forall z\neg\theta(w,x,y,z)$ が恒真である $\iff$ $\forall w\exists x\forall y\exists z\theta(w,x,y,z)$ が充足可能でない $\iff$ $\forall w\forall y\theta(w,f(w),y,g(w,y))$ が充足可能でない $\iff$ $\exists w\exists y\neg\theta(w,f(w),y,g(w,y))$ が恒真である $\iff$ 閉項 $s_1,\ldots,s_n$ と $t_1,\ldots,t_n$

が存在して，$\neg\theta(s_1, f(s_1), t_1, g(s_1, t_1)) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_n, f(s_n), t_n, g(s_n, t_n))$ がトートロジーである．

ここで等号の扱いについて述べておく．等号に関する公理には Eq_0, $\mathrm{Eq}(f)$, $\mathrm{Eq}(R)$ の 3 種類があるが，どれも ∀ 文である．いま，等号を含む ∃ 文 σ が与えられたとして，それを構成する数学的記号の集合を $\mathcal{L}(\sigma)$ とする．すると，σ が等号をもつ論理で恒真であることと，

$$(\mathrm{Eq}_0 \wedge \bigwedge_{f \in \mathcal{L}(\sigma)} \mathrm{Eq}(f) \wedge \bigwedge_{R \in \mathcal{L}(\sigma)} \mathrm{Eq}(R)) \to \sigma$$

が等号公理なしに恒真であることは同値である．上式は ∃ 文であるから，これに定理 7 を適用してトートロジーとしての同値条件を得る．

例 10 （定数以外の）関数記号を含まない ∀∃ 文 $\sigma \equiv \forall\vec{x}\exists\vec{y}\theta(\vec{x}, \vec{y})$ の（等号をもつ論理での）恒真性が有限的に判定できることをみる．ここで，$\theta(\vec{x}, \vec{y})$ は量化記号をもたない．$\vec{a}$ を新しい定数（特殊なスコーレム関数）の列として，

$$\sigma\text{が恒真である} \iff \exists\vec{y}\theta(\vec{a}, \vec{y}) \text{ が恒真である．}$$

そして，以下の ∃ 文を $\exists\vec{z}\varphi(\vec{z})$ とおく．

$$(\mathrm{Eq}_0 \wedge \bigwedge_{R \in \mathcal{L}(\sigma)} \mathrm{Eq}(R)) \to \exists\vec{y}\theta(a, \vec{y}).$$

$\mathcal{L}(\exists\vec{z}\varphi(\vec{z}))$ のエルブラン領域は有限個の定数で構成されるので，$\varphi(\vec{z})$ にそれら定数のすべての組合せを代入して，選言 ∨ でつなぎ，その命題がトートロジーになるか否かを判定すればよい．

有限の立場を堅持するエルブランには，真理は証明可能なもの以外ではありえないから，定理 7 やスコーレムの基本定理は，このままでは無意味であり，それらの形式版を考える必要があった．なお，形式版でも等号は上記と同様に扱えるので，以下でも等号を含まない場合だけを考える．

定理 11（エルブランの定理） 等号を含まない述語論理において，∃ 文 $\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$ が証明可能であるための必要十分条件は，エルブラン領域の要素の

組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーとなることである．

証明　十分性については，命題論理の完全性と $\varphi(\vec{t_i}) \to \exists \vec{x} \varphi(\vec{x})$ の証明可能性から簡単に導ける．必要性については，証明可能であれば恒真であるという事実と，定理 7 から導ける．■

定理 12（エルブランの基本定理）　等号を含まない述語論理において，文 σ の SNF σ^S を $\forall \vec{x} \varphi(\vec{x})$ とする．このとき，$\neg\sigma$ が証明可能であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\varphi)$ のエルブラン領域 U の要素の組 $\vec{t_i} \in U^n$ $(i < k)$ が存在して，$\neg\varphi(\vec{t_1}) \vee \cdots \vee \neg\varphi(\vec{t_k})$ がトートロジーとなることである．ただし，$\mathcal{L}(\varphi)$ が定数をもたない場合は，U に新しい定数を入れるものとする．

証明　必要性については，$\neg\sigma$ が証明可能であれば恒真であるという事実と，スコーレムの基本定理から導ける．十分性については，以下具体例で説明する．$\sigma \equiv \forall w \exists x \forall y \exists z \theta(w, x, y, z)$ で，$\theta(w, x, y, z)$ は量化記号をもたないとする．このとき，$\sigma^S \equiv \forall w \forall y \theta(w, f(w), y, g(w, y))$ である．そして，項の組 $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ が存在して，

$$\neg\theta(s_1, f(s_1), t_1, g(s_1, t_1)) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_k, f(s_k), t_k, g(s_k, t_k)) \qquad (1)$$

がトートロジーであると仮定する．

上式をトートロジーというとき，そこに現れる二つの原子論理式 $R(u_1, \ldots, u_n), R'(u'_1, \ldots, u'_n)$ は，記号として完全に一致しない限り，2 つの異なる原子命題とみなされる．いま (1) に現れる原子論理式 $R(u_1, \ldots, u_n)$ に含まれる項 $u_1, \ldots, u_n$ を (1) の項と呼ぶ．項 u において，$f(s)$ あるいは $g(s, t)$ の形をした極大の部分項をすべて新しい定数 c_s あるいは $d_{s,t}$ で置き換えたものを u^* で表す．$\theta(w, x, y, z)$ は f や g を含まないので，(1) の項 u をすべて u^* に置き換えたものはつぎの形の論理式となる．

$$\neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, t_1^*, d_{s_1^*, t_1^*}) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_k^*, c_{s_k^*}, t_k^*, d_{s_k^*, t_k^*}). \qquad (2)$$

ここで，(2) の各原子論理式 $R(u_1^*, \ldots, u_n^*)$ は (1) の原子論理式 $R(u_1, \ldots, u_n)$ と一意に対応付けられるので，(2) もやはりトートロジーである．命題論理

の完全性定理により (2) は命題論理において証明可能であるから，述語論理においても (2) が証明可能である．ここで，$(s_1^*, t_1^*), \dots, (s_k^*, t_k^*)$ は互いに異なると仮定しても一般性を失わない．たとえば，$(s_1^*, t_1^*) = (s_2^*, t_2^*)$ ならば，$\neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, t_1^*, d_{s_1^*, t_1^*})$ と $\neg\theta(s_2^*, c_{s_2^*}, t_2^*, d_{s_2^*, t_2^*})$ も同一になるので，一方を (2) から消去できる．

まず，いずれかの i について，$g(s_i, t_i)$ は，(1) の他の項の部分項にはならないことに注目する．簡単のため，$i = 1$ とする．このとき，$d_{s_1^*, t_1^*}$ は $\neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, t_1^*, z) \vee \neg\theta(s_2^*, c_{s_2^*}, t_2^*, d_{s_2^*, t_2^*}) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_k^*, c_{s_k^*}, t_k^*, d_{s_k^*, t_k^*})$ に含まれない新しい定数とみなせるので，全称化規則によって $\forall z \neg\theta\ (s_1^*, c_{s_1^*}, t_1^*, z) \vee \neg\theta(s_2^*, c_{s_2^*}, t_2^*, d_{s_2^*, t_2^*}) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_k^*, c_{s_k^*}, t_k^*, d_{s_k^*, t_k^*})$ が証明できる．これから，$\exists y \forall z \neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, y, z) \vee \neg\theta(s_2^*, c_{s_2^*}, t_2^*, d_{s_2^*, t_2^*}) \vee \cdots \vee \neg\theta(s_k^*, c_{s_k^*}, t_k^*, d_{s_k^*, t_k^*})$ が証明できる．次に，$c_{s_1^*}$, $d_{s_2^*, t_2^*}, \dots, d_{s_k^*, t_k^*}$ のいずれかは，他に出現しない新しい定数になる．たとえば，$c_{s_1^*}$ が新しい定数であれば，$\exists y \forall z \neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, y, z)$ の部分を $\exists w \forall x \exists y \forall z \neg\theta\ (w, x, y, z)$ に換え，$d_{s_2^*, t_z^*}$ が新しい定数であれば，$\neg\theta(s_2^*, c_2^*, t_2^*, d_{s_2^*, t_2^*})$ の部分を $\exists y \forall z \neg\theta\ (s_2^*, c_2^*, y, z)$ に換えたものが証明可能である．前者の場合，つぎのステップは $d_{s_2^*, t_2^*}, \dots, d_{s_k^*, t_k^*}$ から定数を選び，後者の場合，つぎのステップは $c_{s_1^*}, c_{s_2^*}, d_{s_3^*, t_3^*}, \dots d_{s_k^*, t_k^*}$ から選ぶ．“部分項である” という関係が循環することはありえないので，必ずつぎの定数がみつかる．式変形の途中で同じ論理式（たとえば，$s_1^* = s_2^*$ ならば $\exists y \forall z \neg\theta(s_1^*, c_{s_1^*}, y, z)$ と $\exists y \forall z \neg\theta(s_2^*, c_{s_2^*}, y, z)$ は同じになる）が現れれば，重複したものを消去していく．その結果，最終的に $\exists w \forall x \exists y \forall z \neg\theta(w, x, y, z)$ が証明できる．よって，$\neg\sigma$ が証明可能になる． ■

スコーレムとエルブランの基本定理をあわせれば，述語論理の完全性定理がただちに導ける．逆に，完全性定理を仮定すれば，二つの基本定理は同じ主張になる．なお，エルブランのオリジナルな証明には欠陥があり，その後いくつかの改正案が出されている．定理 12 の証明は，[Kleene 1967] によるところが大きいが，クリーネの証明もそのままでは理解しにくいところがあるため，多少手を加えた．

参考文献

本論の執筆に際して筆者が参考にした主な資料と，読者に本書とあわせて読んでいただきたい教科書類を簡単に紹介しておこう．

まず，命題論理の話からもう少しくわしい解説が必要な読者には，[ヒルベルト・アッケルマン 1954]，[ジェフリー 1991]，[小野 1994]，[田中 1997] を勧める．述語論理について視野を広めるためには，[Barwise 1977] の第 1 章（Barwise 著），[Gabbay and Guenthner 2001] の第 1 章（Hodges 著）が参考になる．他方，技術的な理解を深めるためには，[ヒルベルト・ベルナイス 1993]，[Kleene 1967]，[Shoenfield 1967]，[Takeuti 1987]，[田中 2002]，[Troelstra and Schwichtenberg 2000] がよいと思う．タブロー法については，[Smullyan 1968] が古典的な教科書であり，[Bell and Machover 1977]，[ジェフリー 1991] と [Nerode and Shore 1997] も読みやすい．歴史的資料としては，[Badesa 2004]，[Feferman 1986]，[Feferman 1990]，[Goldfarb 1971]，[廣瀬・横田 1985]，[van Heijenoort 1967] が参考になる．とくに，[van Heijenoort 1967] には付録でとりあげたスコーレムとエルブランの論文の英訳が所収されている．

[Badesa 2004] Badesa, C., *The Birth of Model Theory, Löwenheim's Theorem in the Frame of the Theory of Relatives*, Princeton Univ. Press (2004).

[Barwise 1977] Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland (1977).

[Bell and Machover 1977] Bell, J. and Machover, M., *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland (1977).

[Feferman 1986] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. I, Oxford Univ. Press (1986).

[Feferman 1990] Feferman, S. *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works*, vol. II, Oxford Univ. Press (1990).

[Gabbay and Guenthner 2001] Gabbay, D. M. and Guenthner, F. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 1, 2nd ed., Kluwer Academic (2001); 1st ed. (1983).

[Goldfarb 1971] Goldfarb, W. D. (ed.), *Jacques Herbrand, Logical Writings*, Harvard Univ. Press (1971).

[ヒルベルト・アッケルマン 1954] ヒルベルト・アッケルマン，伊藤誠訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書 (1954). 原著：Hilbert, D. and Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, 第 3 版，Springer (1949). 第 2 版 (1938) の英訳 *Principles of Mathematical Logic*, AMS Chelsea (1950) や第 6 版 (1972) の和訳 (1974) もある．

[ヒルベルト・ベルナイス 1993] ヒルベルト・ベルナイス，吉田夏彦・渕野昌抄訳『数学の基礎』（シュプリンガー数学クラシックス）シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993). 原著：Hilbert, D. and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik I, II*, 2nd ed., Springer (1934/1968, 1939/1970).

[廣瀬・横田 1985] 廣瀬健・横田一正『ゲーデルの世界——完全性定理と不完全性定理』海鳴社 (1985).

[ジェフリー 1991] ジェフリー，戸田山和久訳『記号論理学――その展望と限界をさぐる』(第 3 版)，マグロウヒル (1991). 原著：Jeffrey, R., *Formal Logic, Its Scope and Limits*, 3rd ed., McGraw-Hill; 1st ed. (1967).

[Kleene 1967] Kleene, S. C., *Mathematical Logic*, John Wiley & Sons, 1967.

[Nerode and Shore 1997] Nerode, A. and Shore, R. A., *Logic for Applications*, 2nd ed., Springer (1997).

[小野 1994] 小野寛晰『情報科学における論理学』日本評論社 (1994).

[Shoenfield 1967] Shoenfield, J. R., *Mathematical logic*, Addison-Welsley (1967). Rep. by A K Peters (2001).

[Smullyan 1968] Smullyan, R. M., *First-Order Logic*, Springer-Verlag (1968). Revised ed. by Dover (1995).

[Takeuti 1987] Takeuti, G., *Proof Theory*, 2nd ed., North-Holland (1987).

[田中 1997] 田中一之編『数学基礎論講義』日本評論社 (1997).

[田中 2002] 田中一之『数の体系と超準モデル』裳華房 (2002).

[Troelstra and Schwichtenberg 2000] Troelstra, A. S. and Schwichtenberg, H., *Basic Proof Theory*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press (2000); 1st ed. (1996).

[van Heijenoort 1967] van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard Univ. Press (1967).

[Whitehead and Russell 1925] Whitehead, A. and Russell, B., *Principia Mathematica*, vol. I, 2nd ed., Cambridge (1925); 1st ed. (1910).

II

モデル理論とコンパクト性

坪井明人



本稿ではモデル理論の初等的事項の解説を行う．モデル理論は理論（公理）T のモデルを研究する側面と，モデルを用いることにより T を研究する側面とがある．また，応用的な研究から純粋にモデル理論的な興味を探究する研究まで，幅広い研究がなされている．したがって，そのすべてを紹介することは難しい．しかし 1 階論理式の表現能力の弱さを逆手にとり，構造を理想的な状態まで拡大（あるいは縮小）することにより，議論を容易にし，最後に再びもとの構造に戻るという手法は多くの場合に共通のものである．この手法を実行するにあたりもっとも重要となるのが，コンパクト性定理である．本稿においては，コンパクト性定理をすべての議論の中心ととらえ，初等的モデル理論の展開を試みている．

コンパクト性定理の証明方法は大きく分けて二つある．一つはゲーデルの完全性定理を用いる方法である．これは完全性定理を知る読者には理解しやすい方法である．しかしながら，モデルという数学的対象の議論をするのに，メタ数学的対象（形式的体系）を用いなければならず，ロジック初心者の読者には難しいかもしれない．もう一つの方法は，構造のウルトラプロダクト（超積）を用いる方法である．ウルトラプロダクトの定義をするためにも，論理式の概念は必要になる．しかしこの方法を使うと，ロジックを知らない読者にも十分に理解できる程度の議論でコンパクト性は証明できる．実際，ウルトラプロダクトの構成は体の（無限）直積を極大イデアルで割るという代数的な構成方法と非常に似ている．これらについては第 2 章においてくわしく述べる．コンパクト性は無限構造が性質をあまり変えずに拡大できることを保証する．たとえば，実数全体の構造とほとんど同じ性質をもつのに，無限大の元や無限小の元をもつ構造を構成できるのである．この手法は超準解析においてはとくに基本的である．

ロジックを数学へ応用する際，重要となる手法の一つに量化記号の消去がある．論理記号は命題論理の論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$ と量化記号 $\exists$, $\forall$ に分けられるが，前者に比べて後者のとり扱いは格段にむずかしい．したがって，数学の命題が量化記号なしで表現できるならば，これほど嬉しいことはないだろう．もちろん，すべての場合で可能になるわけではない．しかし正方行列 A が逆行列をもつという命題（存在記号を必要とする命題）が，A の行列式

の値が 0 にならないという命題（計算で確かめられる命題）と同値になることを考えれば，必ずしも悲観的状況ではないことが分かる．第 3 章では，実際に代数的閉体や実閉体の理論において量化記号消去が可能であることを示す．量化記号消去の証明法には二つの方法がある．一つは与えられた論理式を具体的に量化記号をもたない論理式に変形する手続きを与えるものであり，もう一つはモデルを利用した超越的方法である．前者の利点はもちろん具体性にあり，理論的にはコンピュータの上にのせて命題の変形を行うことも可能である．一方，後者の方法で量化記号消去ができたからといって，具体的に書き換えることはできない．しかし，証明全体の構成を把握するのが容易いという利点がある．

第 4 章で述べる翻訳可能性の概念は，理論上も応用上も重要である．与えられた構造 $\mathcal{M}$ の中には存在しない対象でも，$\mathcal{M}$ の中の対象と同じように扱えるものがある．$\mathcal{M}$ の直積 $\mathcal{M}^n$ を論理式で定義される同値関係 E で割った構造 $(\mathcal{M}^n)_E$ はそのような例である．このような構造を $\mathcal{M}$ に翻訳可能な構造という．体 K 上の代数群はこの意味で K に翻訳可能な構造である．

第 5 章では範疇性について述べる．そこで述べる結果は古典的なものであるが，モデル理論における議論の特徴の一端はみていただけるのではないかと思う．コンパクト性定理（直接にはレーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理）によれば，論理式の集合 T でそのモデルの濃度までは決定できない．またモデルの濃度を決めても，一般にはモデルは一つには決まらない．たとえば，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の公理 T を考えると，濃度 $2^{\aleph_0}$ の T のモデルは次元の種類だけ存在する．一方，標数 0 の代数的閉体の公理を T とすれば，濃度 $2^{\aleph_0}$ の T のモデルは（同型なものを除けば）1 つだけである．第 5 章では，濃度 κ のモデルを一つしかもたない理論 T について考え，そのような理論の特徴づけを行う．

ここで，前提とする基礎知識は大学 2 年生程度の素朴集合論の知識である．言語 $\mathcal{L}$ で記述された論理式，$\mathcal{L}$ を解釈する構造などの定義は既知とするが，それ以上のロジックの知識は仮定しない．ほとんどすべての補題，命題，定理には証明をつけてある．ただし重要で基本的な事項でも本稿で扱えなかったものも多い．たとえば，安定性については $\aleph_0$ 安定性しか議論していない．

モデル理論的単純性については，まったく触れなかった．階数の概念も導入していない．本稿を読みモデル理論に興味をもたれた読者は，さらに進んだ書物（「参考文献」参照）を読んでいただきたいと思う．

第1章
基本事項

1.1　予備知識

1.1.1　濃度，基数，順序数

先にも述べたように，本稿では素朴集合論の知識を仮定している．本章では，必要とする基本的知識と記号の使い方について簡単に説明する．序の付録「集合の基本知識」も参照されたい．

(1)　集合

集合 A と B の共通部分，和集合，差集合は，それぞれ $A \cap B$，$A \cup B$，$A - B$ で表す．また A と B の直積集合は $A \times B$ で表す．A の n 個の直積は A^n と表す．A^n の元は，A の元からなる長さ n の列と考えることができる．この意味で，$\bigcup_{n \in \omega} A^n$ は A の元の有限列全体である．自然数全体の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を本稿では ω と表す．有限列は $\bar{a}, \bar{b}$ などと記される．$\bar{a} = a_0, \ldots, a_{n-1}$ のとき，$a_0 \in A, \ldots, a_{n-1} \in A$ の省略形として $\bar{a} \in A$ を用いることがある．$F = \{A_i : i \in I\}$ が集合族のとき，F に属する集合たちの和集合 $\bigcup_{i \in I} A_i$ は簡単に $\bigcup F$ とも表される．同様に，$\bigcap F = \bigcap_{i \in I} A_i$ である．

集合 A から B への関数 $f : A \to B$ はそのグラフと同一視する．すなわち，

集合 $f \subset A \times B$ が「各 $a \in A$ に対して，$(a,b) \in f$ となる $b \in B$ がただ一つ存在する」という条件を満たすとき，f を関数あるいは写像と呼ぶ．

(2)　基数

基数は集合の濃度（集合の大きさ）を表す指標で，κ, λ などで表される．とくに有限の基数（すなわち自然数）は m, n などで表す．一番小さな無限基数は $\aleph_0$ で表される．以下同様に $n+1$ 番目の無限基数は $\aleph_n$ と記す．集合 A の濃度は，通常 $|A|$, $\#A$, $\mathrm{card}\,A$ などで表される．本稿では構造 $\mathcal{M}$ の領域を $|\mathcal{M}|$ で表すので，区別するために濃度には $\mathrm{card}\,A$ を用いる．$\mathrm{card}\,A \leq \aleph_0$ のとき，A は可算集合といわれる．基数に対して演算（加法，乗法，ベキ乗）が定義される．$\mathrm{card}\,A = \kappa$, $\mathrm{card}\,B = \lambda$ のとき，和集合 $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ の濃度が $\kappa + \lambda$ である．また，$\kappa \times \lambda$ は直積集合 $A \times B$ の濃度である．κ または λ のどちらかが無限ならば，$\kappa + \lambda = \kappa \times \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ となる．とくに A が無限集合のとき，A^n の濃度は A の濃度に等しい．基数の加法と乗法は可換である．集合 A から集合 B への関数全体の濃度が λ^κ である．A のベキ集合（部分集合全体）を $\mathcal{P}(A)$ と書く．$\mathrm{card}\,A < \mathrm{card}\,\mathcal{P}(A)$ がつねに成立する．

(3)　順序数

全順序集合が無限下降列 $a_0 > a_1 > \cdots$ をもたないとき，整列順序集合と呼ばれる．順序数は整列順序集合の順序型（並び方）を表す指標で，本稿では α, β, i などで表す．n 個（有限個）の点からなる整列順序集合はすべて同型なので，有限順序数は自然数と同一視できる．順序数に対しても演算が定義される．整列順序集合 A に対応する順序数が α で，整列順序集合 B に対応する順序数が β のとき，$\alpha + \beta$ は A の後ろに B をおいた整列順序に対応する順序数である．また $\alpha \times \beta$ は A のコピーを B の濃度だけ用意して，B の各点を A のコピーで置き換えてできる整列順序集合に対応する順序数である．自然数全体 ω は整列集合をなす．その順序数も ω と書く．このとき，順序数 $\omega + 1$ と $1 + \omega$ は異なる．$\omega + 1$ は自然数全体の後に 1 点をおいた順序なので，最大元が存在する．しかし $1 + \omega$ は 1 点からなる順序集合の後に ω

をおいた順序集合なので，ω（と同型）になる．つまり，

$$\omega = 1 + \omega \neq \omega + 1.$$

これからわかるように，順序数の和（および積も）は可換ではない．α が $\beta+1$ の形をしているとき，β を α の直前の順序数という．また直前の順序数をもたない順序数（たとえば ω）を極限順序数という．二つの整列順序集合 A, B に対して，α, β をそれぞれの順序型を表す順序数とする．このとき，A が B の中に始切片として埋め込める（$\alpha \leq \beta$）か，B が A の中に始切片として埋め込める（$\beta \leq \alpha$）．α 未満の順序数全体はこの順序により再び整列順序集合となり，その順序型は α である．この事実により，通常 $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$ とみなす．また基数 κ は濃度が κ となる最小の順序数と同一視する．任意の集合 A は整列順序集合になるように順序を入れることができる（整列可能性定理）．その順序数を α とすれば，

$$A = \{a_i : i < \alpha\}$$

と書ける．A の濃度が κ のときは，$A = \{a_i : i < \kappa\}$ と書ける．

(4)　超限帰納法

$A = \{a_i : i < \alpha\}$ とする．ただし α は順序数である．このとき，任意の $X \subset A$ に対して，つぎが成り立つ．

$$(*)\ \forall i < \alpha\ [\{a_j : j < i\} \subset X \implies a_i \in X] \implies X = A.$$

このことはつぎのように説明できる．(*) の左辺を仮定する．もし $X \neq A$ ならば $A - X$ は空でない．したがって，α が順序数なこと（整列順序なこと）から，$A - X$ に属する元で（番号が）最小のもの a_i が存在する．最小性から，$\{a_j : j < i\} \subset X$ となる．(*) の左辺を仮定しているから，$a_i \in X$ となり矛盾を得ることになる．一般に (*) の形の主張を超限帰納法と呼んでいる．

α を順序数として，なんらかの性質をもつ集合族 $\{B_i : i < \alpha\}$ を定義したいとする．超限帰納法を使うことを前提に考えれば，与えられた $i < \alpha$ に対

して，B_j $(j < i)$ がすでに定義されていると仮定して，B_i を定義すればよいことになる．このような構成法を超限帰納法による構成と呼ぶ．

(5)　ツォルンの補題

本書で用いるツォルンの補題はつぎの形で十分である．

(*) $\mathcal{X} \neq \emptyset$ を集合族とする．$\mathcal{X}$ の元の包含関係に関する上昇列 $\{X_i\}_{i<\alpha}$ $(i < j < \alpha \Longrightarrow X_i \subset X_j)$ に対して，その和集合 $\bigcup_{i<\alpha} X_i$ はいつも $\mathcal{X}$ に属すると仮定する．このとき $\mathcal{X}$ には（包含関係に関する）極大元が存在する．

(6)　群・環・体

これらについてごく簡単に説明する．どの代数の教科書にも載っているので，詳細はそちらを参照してほしい．集合 G が単位元と呼ばれる元 e をもち，2 項演算 $\cdot$，単項演算 $^{-1}$ が定義されていて，つねに条件 $a \cdot e = e \cdot a = a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ を満たすとき，G は群と呼ばれる．また 2 項演算 $\cdot$ が可換 $(a \cdot b = b \cdot a)$ のとき，可換群と呼ばれる．このときの単位元は通常 0, 2 項演算は $+$, 単項演算は $-$ で書かれる．R が可換群で，さらに $+$ 以外の 2 項演算 $\cdot$（積と呼ばれる）と特定の元 $1 \in R$（積に関する単位元と呼ばれる）をもち，$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ を満たすとき，R は環と呼ばれる．環 R にさらに単項演算 $^{-1}$ が定義されていて，$R - \{0\}$ が $(1, \cdot, ^{-1}$ に関して）群となるとき，R を体と呼ぶ．整数の集合 $\mathbb{Z}$ は自然に群となる．また積も定義されているので環でもある．しかし体ではない．有理数の集合 $\mathbb{Q}$ や実数の集合 $\mathbb{R}$，複素数の集合 $\mathbb{C}$ は体となる．

K を体とする．$F \subset K$ をその部分体（同じ演算で体になっている部分集合）とする．$a \in K$ が F 係数の方程式の解になっているとき，a は F 上代数的な数という．F 上代数的でない数は F 上超越的な数という．$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 係数方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解なので，$\mathbb{Q}$ 上代数的である．しかし，π は $\mathbb{Q}$ 上超越的なことが知られている．

例 1.1　V を体 K 上のベクトル空間とする．V には基底が存在する．これを超限帰納法を用いて証明する．$V = \{\vec{a}_i : i < \kappa\}$ となるように一列に並べておく．$B_0 = \emptyset$ として，V の部分集合の上昇列 $B_i \subset V$ を帰納的に（超限帰納法を用いて）定義する．

- i が極限順序数のとき，$B_i = \bigcup_{j<i} B_j$.
- $i = i_0 + 1$ のとき，$\vec{a}_{i_0} \in \langle B_{i_0} \rangle$ ならば $B_i = B_{i_0}$，そうでなければ $B_i = B_{i_0} \cup \{\vec{a}_{i_0}\}$.（$\langle B_{i_0} \rangle$ は B_{i_0} によって張られる部分空間である.）

このとき，各 B_i は 1 次独立なベクトルからなる集合で，そのつくり方から B_κ が基底になる．自然数に対する帰納法と異なるのは，極限の場合も考える必要があることである．また注意すべき点は，極限順序数 i に対し，各 B_j $(j < i)$ が 1 次独立なベクトルからなる集合ならば，$B_i = \bigcup_{j<i} B_j$ も 1 次独立になる点である．

1.1.2　言語，論理式，構造

言語は定数記号，関数記号，関係記号からなる一つの集合であり，$\mathcal{L}, \mathcal{L}^*, \ldots$ などで表される．変数も記号であり，

$$x, y, z, \ldots, x_0, x_1, \ldots, y_0, y_1, \ldots, z_0, z_1, \ldots$$

などを用意する．$\mathcal{L}$ の項，$\mathcal{L}$ の論理式（$\mathcal{L}$ 論理式）は帰納的に定義される．項は $t, u, \ldots$ などで表される．t の中の変数が $x_0, \ldots, x_{n-1}$ に含まれるとき t は $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と書かれる．論理式を表すのには，φ, ψ, $\ldots$ などを用いる．$\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ が論理式のとき，論理式 $\varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ は $\bigwedge_{i<n} \varphi_i$ と書かれることがある．自由変数をもたない論理式は閉論理式と呼ばれる．また φ の中の自由変数が $x_0, \ldots, x_{n-1}$ に含まれるとき φ は $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ と書かれる．$t_0, \ldots, t_{n-1}$ が項のとき，$\varphi(t_0, \ldots, t_{n-1})$ は φ の中の x_i を t_i で置き換えてできる論理式である．$\bar{x} = x_0, \ldots, x_{n-1}$ のとき，論理式 $\forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \varphi$ は $\forall \bar{x} \varphi$ と略記される．$\mathcal{L}$ 論理式は $S = \mathcal{L} \cup \{$ 変数の集合 $\} \cup \{$ 論理記号の集合 $\}$ の元

の有限列なので，$\mathcal{L}$ 論理式は（変数だけの違いは無視すると）$(\mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0)$ 個存在する．

$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ の領域は $|\mathcal{M}|$ で表す．構造 $\mathcal{M}$ の濃度とは $|\mathcal{M}|$ の濃度のことである．$\mathcal{M}$ において，記号 $X \in \mathcal{L}$ の解釈を $X^{\mathcal{M}}$ と書く．したがって，$\mathcal{M}$ は

$$(|\mathcal{M}|, X^{\mathcal{M}})_{X \in \mathcal{L}}$$

の形をしている．$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$ 論理式，$a_0, \ldots, a_{n-1}$ を $|\mathcal{M}|$ の元とするとき，$\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ が $\mathcal{M}$ で成立することを

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$$

と書く．$\mathcal{L}$ 構造は $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ などで表す．二つの $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ で成立する $\mathcal{L}$ 閉論理式がまったく同じとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ は基本的に同値あるいは初等的に同値 (elementarily equivalent) といわれ，記号では $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ と表される．

T を $\mathcal{L}$ 閉論理式の一つの集合とする．T のすべての論理式が $\mathcal{M}$ で成立するとき，$\mathcal{M} \models T$ と書き，$\mathcal{M}$ は T のモデルであるという．T がモデルをもつとき，T を理論 (theory) と呼ぶ．二つのモデル $\mathcal{M} \models T, \mathcal{N} \models T$ に対して必ず $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ となるとき，T は完全であるという．$\mathcal{M}$ において成立する $\mathcal{L}$ 閉論理式全体を $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$（あるいは単に $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$）と書く．$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ は完全な理論である．ただし，ここでの完全という言葉は，つぎに述べる完全性定理の完全とは意味が異なっているので注意しよう．

1.1.3　完全性，コンパクト性

T を言語 $\mathcal{L}$ で書かれた閉論理式の集合とする．完全性定理は，T が整合的（充足可能）なこと（形式的体系において T から矛盾が出ないこと）と T がモデルをもつことの同値性を主張する．この定理からつぎのコンパクト性定理がただちに導かれる．

定理 1.2（コンパクト性定理）　つぎの 2 条件は同値である．

1. T はモデルをもつ．
2. T の任意の有限部分集合 T_0 はモデルをもつ．

証明　$1 \Rightarrow 2$ は自明なので，$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．1 でないと仮定する．完全性により，T は整合的でない．すなわち，形式的体系を用いて，T から矛盾が出る．T から矛盾を出す証明はもちろん有限の長さなので，そこに現れる T の論理式は有限個である．それらを集めて $T_0 \subset T$ とすれば，T_0 から矛盾が出る．このことは T_0 がモデルをもたないことを意味する．■

上の証明は簡潔であるが，モデルという意味論的対象を扱うのに形式的体系をもち出さなくてはならない．しかし，ウルトラプロダクトを用いると形式的体系を使わずに証明できる．ウルトラプロダクトについては 2.2 節でくわしく説明する．

1.2　構造の同型

1.2.1　同型

$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ が同型であるとは，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ がある対応（全単射）σ を通して本質的にまったく同じ構造になっていることである．たとえば $+$ という 2 変数の関数記号だけからなる言語 $\mathcal{L}$ を考える．$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ がまったく同じ $\mathcal{L}$ 構造であるという語感から何を想像するだろうか．$\mathcal{M}$ において a と b を加えたのが $a +^{\mathcal{M}} b$ である．一方 $\mathcal{N}$ においては，$\sigma(a)$ と $\sigma(b)$ を加えると $\sigma(a) +^{\mathcal{N}} \sigma(b)$ になる．また $a +^{\mathcal{M}} b \in |\mathcal{M}|$ に対応するのは $\sigma(a +^{\mathcal{M}} b) \in |\mathcal{N}|$ である．したがって，もし σ によって $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の元を同一視できるとすれば，$\sigma(a +^{\mathcal{M}} b) = \sigma(a) +^{\mathcal{N}} \sigma(b)$ が成立しなければならない．このことを一般の言語で表現したのが，つぎのわれわれの同型の定義である．

定義 1.3　$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ を二つの $\mathcal{L}$ 構造とする．領域の間の全単射 $\sigma : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ はつぎの 3 条件を満たすとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の同型写像と呼ばれる．

1. $c \in \mathcal{L}$ が定数記号のとき，

$$\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}.$$

2. $f \in \mathcal{L}$ が m 変数関数記号のとき，すべての $a_1, \ldots, a_m \in |\mathcal{M}|$ に対して，

$$\sigma(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_m)) = f^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m)).$$

3. $P \in \mathcal{L}$ が n 変数関係記号のとき，

$$\sigma(P^{\mathcal{M}}) = P^{\mathcal{N}}.$$

σ が構造 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の同型写像であるとき，$\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が同型写像であるといい，記号で $\sigma : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ と書く．$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の同型写像 σ が存在するとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ は同型であるといい，記号 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ で表す．

問題 1.4　$\sigma : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ ならば，$\sigma^{-1} : \mathcal{N} \cong \mathcal{M}$ である．

補題 1.5　$\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ を同型写像とする．項 $t(x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ に対して $\sigma(t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = t^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ が成立する．

証明　t の中に含まれる関数記号の数 k に関する帰納法で証明できる．$k = 1$ のときは，同型の定義から明らかである．$k+1$ のとき，t は f を関数記号として $f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$ の形である．$t_1, \ldots, t_m$ に対しては帰納法の仮定が使えるので，以下の変形ができる．

$$\begin{aligned}
\sigma(t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \sigma(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n))) \\
&= f^{\mathcal{N}}(\sigma(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)), \ldots, \sigma(t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n))) \\
&= f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)), \ldots, \\
&\qquad t_m^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))) \\
&= t^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)).
\end{aligned}$$

■

命題 1.6　$\sigma : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ を全単射とする．つぎの 3 条件は同値である．

1. $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ は同型写像である．
2. すべての原子論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ とすべての $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)).$$

3. すべての論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ とすべての $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)).$$

証明　$3 \Rightarrow 1$ は明らかである．$1 \Rightarrow 2$：原子論理式は $P(t_1, \ldots, t_m)$ の形または $t = u$ の形のいずれかである．ただし，P は関係記号で $t_1, \ldots, t_m, t, u$ は項である．どちらも同様なので，前者の場合を示す．$\mathcal{M} \models P(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m(a_1, \ldots, a_n))$ とする．これより

$$(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) \in P^{\mathcal{M}}$$

を得る．したがって，

$$(\sigma(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)), \ldots, \sigma(t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n))) \in \sigma(P^{\mathcal{M}}).$$

σ が同型写像なので，$\sigma(P^{\mathcal{M}}) = P^{\mathcal{N}}$ である．また，補題 1.5 により，$\sigma(t_i^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = t_i^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ である．よって 002096840015008

$$(t_1^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)), \ldots, t_m^{\mathcal{N}}(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))) \in P^{\mathcal{N}}.$$

これは，$\mathcal{N} \models P(t_1(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)), \ldots, t_m(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)))$ を意味する．

$2 \Rightarrow 3$：2 を仮定する．論理式 φ に含まれる論理記号の数 k に関する帰納法で以下を示す．

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)).$$

$k = 0$ のとき，φ は原子論理式なので，2 の主張そのものである．$k+1$ のときを考える．φ が $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$, $\neg\varphi_1$, $\exists x \varphi_1$, $\forall x \varphi_1$ の各場合に調べればよい．$\exists x \varphi_1$ の場合が本質的である．$\mathcal{M} \models \exists x \varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n, x)$ とする．このとき，$\mathcal{M} \models \varphi_1(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ となる $b \in |\mathcal{M}|$ がある．帰納法の仮定により，$\mathcal{N} \models \varphi_1(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_n), \sigma(b))$．よって $\mathcal{N} \models \exists x \varphi_1(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_n), x)$ を得る．逆向き（$\Leftarrow$）は σ の代わりに σ^{-1} を考えればよい．■

定義 1.7 同型写像 $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ の自己同型写像という．$\mathcal{M}$ の自己同型写像 σ が集合 A を（点ごとに）固定するとき，すなわち $\sigma|A = \mathrm{id}_A$ のとき，σ は A 上の自己同型写像といわれる．A 上の自己同型写像全体を $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$ と書く．$A = \emptyset$ のときは，簡単に $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ と書く．

1.2.2 基本写像

定義 1.8（基本写像） $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$A \subset |\mathcal{M}|$ とする．$\sigma : A \to |\mathcal{N}|$ は以下の条件を満たすとき，$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像 (elementary mapping) と呼ばれる：すべての $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ とすべての $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \implies \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)).$$

注意 1.9 上の定義と命題 1.6 により，同型写像 $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ は明らかに $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像である．また，$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像が存在するとき，（0 変数の φ を考えることにより）$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ となることがわかる．また $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像の定義において矢印（$\Rightarrow$）は片側だけになっている．しかし，φ の代わりに $\neg\varphi$ について考えることにより，σ が $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像ならば，すべての論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ とすべての $a_1, \ldots, a_n \in A$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$$

が成立することがわかる．

定義 1.10（部分構造） $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．部分集合 $\mathcal{N} \subset |\mathcal{M}|$ はつぎの 2 条件を満たすとき，$\mathcal{M}$ の部分構造 (substructure) と呼ばれる．

1. $c \in \mathcal{L}$ が定数記号のとき，$c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{N}$.
2. $f \in \mathcal{L}$ が関数記号のとき，$\mathcal{N}$ は関数 $f^{\mathcal{M}}$ で閉じている．

$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分構造のとき，各記号の解釈を $\mathcal{N}$ に制限することにより，$\mathcal{N}$ は自然に $\mathcal{L}$ 構造となる．定数記号に対しては $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$，$n$ 変数関数記号に対しては $f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}}|\mathcal{N}^n$，$m$ 変数関係記号については $P^{\mathcal{N}} = P^{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N}^m$ とする．

問題 1.11　群を $\{e, \cdot, ^{-1}\}$ 構造と考えれば，部分群の概念と部分構造の概念は一致することを示せ．

定義 1.12　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．

1. $A \subset |\mathcal{M}|$ とする．言語 $\mathcal{L}$ に新しい定数記号 c_a たち（$a \in A$）を付加した言語を $\mathcal{L}(A)$ と書く．$\mathcal{M}$ は自然に $\mathcal{L}(A)$ 構造となる．すなわち，$c_a^{\mathcal{M}} = a$ と解釈する．
2. 部分構造 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ はつぎの条件を満たすとき，基本部分構造 (elementary substructure) と呼ばれる．

   (*) 任意の $\mathcal{L}(|\mathcal{N}|)$ 閉論理式 φ に対して，$\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{N} \models \varphi$.

   このとき，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{N}$ の基本拡大 (elementary extension) と呼ばれる．
3. $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の基本部分構造のとき，$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ あるいは $\mathcal{M} \succ \mathcal{N}$ と書く．

注意 1.13　$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ の部分構造のとき，つぎの 2 条件は同値である．

1. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.
2. 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像である．

問題 1.14

1. 基本部分構造の定義 1.12 の条件 (*) において，片側向きの矢印だけに制限しても同値な定義になることを示せ．
2. $\prec$ に対して推移性が成り立つことを示せ．

注意 1.15　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$T^* = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}(|\mathcal{M}|)}(\mathcal{M})$ とおく．すなわち $\mathcal{M}$ で成立する $\mathcal{L}(|\mathcal{M}|)$ 閉論理式全体を T^* とする．このとき，T^* は $\mathcal{M}$ の基本設計図 (elementary diagram) あるいは初等ダイヤグラムと呼ばれる．T^* の勝手なモデル $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の基本拡大と思うことができる．実際 $a \in \mathcal{M}$ に対して，$c_a^{\mathcal{N}}$ を対応させる写像 σ が基本部分構造としての埋め込み $\sigma : \mathcal{M} \cong \sigma(\mathcal{M}) \prec \mathcal{N}$ を与える．これを示そう．$a, b \in |\mathcal{M}|$ に対して，$a \neq b$ とすれば，"$c_a \neq c_b$" $\in T^*$．$\mathcal{N} \models T^*$ より，$\sigma(a) = c_a^{\mathcal{N}} \neq c_b^{\mathcal{N}} = \sigma(b)$．これから $\sigma : \mathcal{M} \to \sigma(\mathcal{M})$ が全単射になることがわかる．$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を勝手な $\mathcal{L}$ 論理式

として，$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ とする．$\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) \in T^*$ なので，$\mathcal{N} \models T^*$ から，$\mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ を得る．これからとくに，σ が $\mathcal{M}$ と $\sigma(\mathcal{M})$ の同型を与えていることがわかる．また $\sigma(\mathcal{M}) \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ とすれば（σ が同型写像なことにより）$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ を得る．さらに上の議論から，$\mathcal{N} \models \varphi(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n))$ を得る．これは $\sigma(\mathcal{M}) \prec \mathcal{N}$ を意味する．

1.3 定義可能集合

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．

定義 1.16 $n \in \omega$ として，$A \subset |\mathcal{M}|^n$ を考える．A が $\mathcal{M}$ の定義可能集合 (definable set) であるとは，

$$A = \{\bar{a} \in |\mathcal{M}|^n : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$$

となる $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と $|\mathcal{M}|$ の元の列 $\bar{b}$ が存在することである．このとき $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ は A を定義するという．また A はパラメータ $\bar{b}$ を用いて定義可能であるといわれる．$\bar{b}$ の各元が集合 B に属するとき，A は B 定義可能であるといわれる．集合 $\{\bar{a} \in |\mathcal{M}|^n : \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$ は $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ の $\mathcal{M}$ における解の全体であり，$\varphi(\bar{x}, \bar{b})^{\mathcal{M}}$ と記される．

$|\mathcal{M}|$ の部分集合の全体 $\mathcal{P}(|\mathcal{M}|)$ の濃度は $|\mathcal{M}|$ の濃度より真に大きい．しかし，定義可能集合全体の濃度は $|\mathcal{M}|$ の濃度と大差ない．実際，$\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ の選び方は $(\mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0)$ 通りしかない．また有限列 $\bar{b}$ の選び方は $(\mathrm{card}\,|\mathcal{M}| + \aleph_0)$ 通りしかない．よって $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ の種類は $(\mathrm{card}\,\mathcal{L} + \mathrm{card}\,|\mathcal{M}| + \aleph_0)$ 個しかない．とくに $\mathcal{L}$ が可算集合ならば，その種類は $(\mathrm{card}\,|\mathcal{M}| + \aleph_0)$ 個である．したがって定義可能集合の種類も $(\mathrm{card}\,|\mathcal{M}| + \aleph_0)$ 個以下である．

例 1.17 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を $\{0, +\}$ 構造とみる．偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$ は $\{k \in \mathbb{Z} : \mathbb{Z} \models \exists y[k = y + y]\}$ と書けるので $\mathbb{Z}$ の定義可能部分集合である．

$A \subset |\mathcal{M}|^n$ が $\mathcal{M}$ の定義可能集合になることを示すには，A を具体的に定義する論理式 $\varphi(\bar{x})$ をみつければよい．定義可能でないことを示すときは，つぎの命題が有用である．

命題 1.18 $A \subset |\mathcal{M}|^n$ がパラメータ $\bar{b}$ を用いて定義可能とする．また $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\bar{b})$ とする．このとき $\sigma(A) = A$（集合として A が固定される）が成立する．

証明 $A = \varphi(\bar{x}, \bar{b})^{\mathcal{M}}$ とする．$\bar{a} \in A$ とすれば，$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$．命題 1.6 により，$\mathcal{M} \models \varphi(\sigma(\bar{a}), \sigma(\bar{b}))$．$\sigma$ は $\bar{b}$ を（元の列として）固定するので，$\sigma(\bar{b}) = \bar{b}$．よって $\mathcal{M} \models \varphi(\sigma(\bar{a}), \bar{b})$．これは $\sigma(\bar{a}) \in A$ を意味する．すなわち $\sigma(A) \subset A$ である．$\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a})$ なので逆向きの包含関係も成立する． ■

例 1.19 S を $S(x) = x + 1$ なる関数とする．このとき，$(\mathbb{Z}, S, <)$ において，偶数全体の集合 $2\mathbb{Z}$ は $\emptyset$ 定義可能集合ではない．実際 S は $(\mathbb{Z}, S, <)$ における自己同型写像になっている．この写像で偶数全体は奇数全体に移されるので，$2\mathbb{Z}$ は固定されない．よって $\emptyset$ 定義可能集合ではない．

上の例 $(\mathbb{Z}, S, <)$ において，実はパラメータ 0 を用いても，偶数全体は定義可能にならない．しかし，0 を固定する自己同型写像が少ない（自明なものしかない）ので，この手法（命題 1.18）はただちには使えない．そこで，構造を拡大して自己同型写像を増やすことを考える．

例 1.20 S は例 1.19 と同じ関数とする．$(\mathbb{Z}, 0, S, <)$[1]において，$2\mathbb{Z}$ は定義可能集合ではない．$2\mathbb{Z}$ が論理式 $\varphi(x)$ によって定義されたとする．$\mathcal{M} \succneqq (\mathbb{Z}, 0, S, <)$ を真の基本拡大[2]，$D = \varphi(x)^{\mathcal{M}}$ とする．$\mathbb{Z}$ においては，偶数と奇数は交互にでてくる．$\mathcal{M}$ においても同様のことが成立しているので，

$$a \in D \implies S(a) \notin D \tag{1.1}$$

が成立する．$\mathcal{M}$ における写像 σ を $\sigma(a) = a$ $(a \in \mathbb{Z})$，$\sigma(a) = a + 1 = S(a)$ $(a \notin \mathbb{Z})$ で定義すれば，σ は $\mathcal{M}$ の自己同型写像となる．上の性質 (1.1) により D は不変ではない．よって $2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の定義可能部分集合ではない．

1) この構造では，0 を定数記号として論理式の中に使ってよい．
2) 真の基本拡大の存在はコンパクト性定理による．

問題 1.21　$(\mathbb{Q}, <)$ における定義可能集合 $A \subset \mathbb{Q}$ は区間（1 点集合も含める）たちの有限和である．

第2章
コンパクト性

コンパクト性定理はモデル理論においてもっとも基礎的な定理である．すべてはこの定理から始まるといっても過言ではない．本章では完全性定理を経由せず，ウルトラプロダクトの基本定理を用いてコンパクト性定理を証明する．

2.1　ウルトラフィルター

以下では集合 I のベキ集合を $\mathcal{P}(I)$ で表す．I の‘大きな部分集合’からなる族を定義したい．

定義 2.1　$I \neq \emptyset$ とする．$U \subset \mathcal{P}(I)$ に対してつぎの定義を与える．

1. U は有限交叉性をもつ $\iff$ U の各有限部分集合 $F \subset U$ に対して $\bigcap F \neq \emptyset$（すなわち，$\forall \underbrace{A_1, \ldots, A_n}_{\text{有限個}} \in U$ に対して，$A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$）．
2. U は I 上のウルトラフィルター (ultrafilter) である．$\iff$ U は有限交叉性をもつ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大である（すなわち，U 自体は有限交叉性をもつが U の真の拡大は有限交叉性をもたない）．

簡単な例をあげておく．

例 2.2

1. I を無限集合とする．$A \subset I$ が補有限 (cofinite) であるとは，A の補集合 $A^c = I - A$ が有限となることである．$F = \{A \subset I : A$ は補有限 $\}$ とすれば，F は有限交叉性をもつ．F はフレシェフィルター (Fréchet filter) と呼ばれる．
2. I が非可算のとき，$F = \{A \subset I : A^c$ は高々可算 $\}$ は有限交叉性をもつ．
3. $a \in I$ とするとき，$U_a = \{A \subset I : a \in A\}$ は I 上のウルトラフィルターになる：U_a のすべての元は a をもつのでそれらの共通部分は空でない．$\{a\} \in U_a$ に注意する．U_a を真に拡大する集合には a を含まない集合 B がある．このとき，$\{a\} \cap B = \emptyset$ である．U_a の形のウルトラフィルターを主ウルトラフィルターと呼ぶ．$\bigcap U_a = \{a\}$ である．

補題 2.3 $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性をもつとする．このとき，任意の $A \subset I$ に対して，

$$U \cup \{A\} \text{ または } U \cup \{A^c\}$$

の少なくとも一方は有限交叉性をもつ．

証明 両方とも有限交叉性をもたないとすれば，有限集合 $F_1 \subset U$ と $F_2 \subset U$ で，$\bigcap F_1 \cap A = \emptyset$, $\bigcap F_2 \cap A^c = \emptyset$ となるものが存在する．したがって，$F = F_1 \cup F_2$ とすれば，$\bigcap F = \emptyset$ となる．これは矛盾． ■

補題 2.4 $U \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交叉性をもつとき，つぎの 2 条件は同値である．

1. U は I 上のウルトラフィルターである．
2. 任意の $A \subset I$ に対して，$A \in U$ または $A^c \in U$.

証明 $1 \Rightarrow 2$ は補題 2.3 と U の極大性による．$2 \Rightarrow 1$ を示そう．1 でないとする．U に属さない $A \subset I$ で $U \cup \{A\}$ が有限交叉性をもつものがある．$A^c \in U$ とすれば，これは $U \cup \{A\}$ の有限交叉性に反する．したがって，$A, A^c \notin U$ を得る． ■

補題 2.5 U を I 上のウルトラフィルターとする．I の部分集合 A, B に対してつぎが成り立つ．

1. $A \in U, A \subset B \subset I \implies B \in U$.
2. $A, B \in U \iff A \cap B \in U$.

証明 1. $A \in U$, $A \subset B$ のとき $U \cup \{B\}$ も有限交叉性をもつ．したがって，極大性により，$B \in U$.

2. $A, B \in U$ だが $A \cap B \notin U$ とする．補題 2.4 により，$(A \cap B)^c \in U$. しかし $A \cap B \cap (A \cap B)^c = \emptyset$ なので，これは U の有限交叉性に矛盾する．逆向きは 1 より明らか． ■

補題 2.6 $U_i \subset \mathcal{P}(I)$ $(i < \alpha)$ を有限交叉性をもつ集合の上昇列とする．ただし α は順序数である．このとき，$U^* = \bigcup_{i<\alpha} U_i$ も有限交叉性をもつ．

証明 有限個の $A_i, \ldots, A_n \in U^*$ を勝手にとる．このとき，これらをすべて含む U_i が存在する．U_i は有限交叉性をもつので，$A_1 \cap \cdots \cap A_n$ は空でない． ■

定理 2.7（ウルトラフィルターの存在） I を無限集合として，$F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性をもつとする．このとき，F を拡大して I 上のウルトラフィルターにすることができる．

証明

$$\mathcal{U} = \{U \subset \mathcal{P}(I) : \ U \text{ は } F \text{ を含み有限交叉性をもつ}\}$$

とする．補題 2.6 により，$\mathcal{U}$ にツォルンの補題を適用することができる．すなわち，包含関係に関する極大元が $\mathcal{U}$ に存在する． ■

注意 2.8 例 2.2 の 3 で存在を示したのは，$a \in I$ を中心としてもつウルトラフィルターである．中心のないウルトラフィルターも存在する．$F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を補有限集合全体（フレシェフィルター）とする．これは有限交叉性をもち，$\bigcap F = \emptyset$ である．F はウルトラフィルター U に拡大される（定理 2.7）．

例 2.9 ウルトラフィルターはロジックに特有な概念ではない．実は代数における極大イデアルの概念と深く関係している．これについて説明しよう．$\{F_i : i \in I\}$ を体の族とする．$R = \prod_{i \in I} F_i$ は 1 をもつ環になる．$a = (a_i)_{i \in I} \in R$ に対して，

$$Z_a = \{i \in I : a_i = 0\}$$

とおく．$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとすると，$U_\mathfrak{m} = \{Z_a \subset I : a \in \mathfrak{m}\}$ が I 上のウルトラフィルターになることが以下のように示される：最初に与えられた $A \in U_\mathfrak{m}$ に対して，$a_i = 0\ (i \in A)$, $a_i = 1\ (i \in I - A)$ となる $a \in \mathfrak{m}$ の存在を示そう．実際 $A = Z_{a_0}$ なる $a_0 \in \mathfrak{m}$ を任意に選び，$b \in R$ を各 $i \notin A$ に対して，$b_i = (a_i)^{-1}$ と定めれば，$a = a_0 \cdot b \in \mathfrak{m}$ が条件を満たす．以下の議論では $A = Z_a$ となる $a \in \mathfrak{m}$ を選ぶときは，必ず上の条件が成立しているとする．

【有限交叉性】$Z_a, Z_b \in U_\mathfrak{m}$ が交叉することを示そう（一般の有限個数の場合も同じ議論である）．交叉しないとすれば，

$$Z_a \cap Z_b = \emptyset$$

である．このとき，$1 - a$ と $1 - b$ の成分で共通に 1 となる場所 $i \in I$ がない．すなわち，各 $i \in I$ に対して，$1 - a$ あるいは $1 - b$ のいずれかの i 成分は 0 である．よって $(1 - a)(1 - b) = 0$ である．展開して整理すれば，1 が $a, b \in \mathfrak{m}$ たちの積と和で表現されていることがわかる．これは $\mathfrak{m} \neq R$ に矛盾する．

【極大性】補題 2.4 により，与えられた $A \subset I$ に対して，A または A^c のいずれかが $U_\mathfrak{m}$ に属することを示せばよい．$A = Z_a$ となる $a \in R$ をとる．$a \in \mathfrak{m}$ ならば，$A \in U_\mathfrak{m}$ である．$a \notin \mathfrak{m}$ のときは，$\mathfrak{m}$ の極大性により，

$$1 = a'a + b$$

となる $a' \in R$ と $b \in \mathfrak{m}$ がある．とくに b は $i \in A$ に対してつねに $b_i = 1$ である．$c \in R$ を $i \in A^c$ に対して $c_i = 0$ で，$i \in A$ に対して $c_i = 1$ なる元とする．$bc \in \mathfrak{m}$ であり，$A^c = Z_{bc}$ が成立する．よって，$A^c \in U_\mathfrak{m}$ である．

問題 2.10　上の例 2.9 の記号を使う．I 上のウルトラフィルター U に対して，$\mathfrak{m}_U$ を

$$\mathfrak{m}_U = \{a \in R : Z_a \in U\}$$

で定義するとき，$\mathfrak{m}_U$ は R の極大イデアルになることを示せ．また $U_{\mathfrak{m}_U} = U$,

$\mathfrak{m}_{U_\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ が成立することを示せ．

2.2 ウルトラプロダクト

この節では，言語 $\mathcal{L}$ は関数記号だけからなるものとする．この仮定は表現を簡潔にするためのもので，一般の場合もまったく同様の議論ができる．本章より後では，とくに断らない限り，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ の領域 $|\mathcal{M}|$ も単に $\mathcal{M}$ で表す．したがって，$a \in \mathcal{M}$ とは $a \in |\mathcal{M}|$ のことであり，$A \subset \mathcal{M}$ は $A \subset |\mathcal{M}|$ のことである．

$I \neq \emptyset$ を集合とする．各 $i \in I$ に対して，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}_i$ が与えられているとき，領域の直積 $\mathcal{N} = \Pi_{i \in I} \mathcal{M}_i$ を考えよう．$\mathcal{N}$ の元は $(a_i)_{i \in I}$ の形をしている．集合 $\mathcal{N}$ は n 変数関数記号 $f \in \mathcal{L}$ の解釈を成分ごとの計算に帰着することで $\mathcal{L}$ 構造になる：

$$f^{\mathcal{N}}(a^1, \ldots, a^n) \;=\; \left(f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)\right)_{i \in I}.$$

ただし，$a^j = (a_i^j)_{i \in I} \in \mathcal{N}$ $(j = 1, \ldots, n)$ である（a^j は a の j 乗というわけではないので注意．j は単なる番号である）．

上の定義は，群や環の直積の定義を模したものになっている．しかし，つぎのことに注目してほしい．

(*) $\mathrm{card}\, I \geq 2$ として，$\mathcal{M}_i$ たち $(i \in I)$ を体とする．$\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ は体にはならない．

直積 $\mathcal{N}$ を体にするためには，$\mathcal{N}$ の極大イデアルで割るという操作を行えばよかった．同様の操作は一般の構造に対して存在するのだろうか．すなわち，与えられた構造たち $\mathcal{M}_i$ $(i \in I)$ がある条件（群だったり体だったりという条件）を満たすとき，直積構造 $\mathcal{N}$ を割ることにより初めの条件を満たすようにできないだろうか．これに肯定的に答えるのが，ウルトラフィルターによる同値関係で割るという操作である．

以下では，しばらくつぎの仮定をおく．

- $I \neq \emptyset$ とする．

- U を I の上のウルトラフィルターとする．

- 各 $i \in I$ に対して，$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}_i$ が与えられている．

- $\mathcal{N} = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i$ をこれらの構造の直積とする．

- $a \in \mathcal{N}$, $i \in I$ に対して，a_i は a の i 番目の座標とする．

直積集合 $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$$

で定義する．補題 2.5 を用いると，$\sim$ が同値関係になることが簡単に示される．$\mathcal{N}$ をこの同値関係で割った集合を $\mathcal{M}^* = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$ で表す．$a \in \mathcal{N}$ の同値類を $[a]$ で表せば，$\mathcal{M}^* = \{[a] : a \in \mathcal{N}\}$，$[a] = [(a_i)_{i \in I}]$ である．

定義 2.11（ウルトラプロダクト） 集合 $\mathcal{M}^* = \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / U$ は関数記号 $f \in \mathcal{L}$ の解釈をつぎのように定めることで $\mathcal{L}$ 構造になる．

$$f^{\mathcal{M}^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [f^{\mathcal{N}}(a^1, \ldots, a^n)].$$

構造としての $\mathcal{M}^*$ を $\mathcal{M}_i$ たちの（U による）超積，あるいはウルトラプロダクト (ultraproduct) という．

上の定義は整合的な定義である．すなわち，$a^1 \sim b^1, \ldots, a^n \sim b^n$ のとき，

$$f^{\mathcal{N}}(a^1, \ldots, a^n) \sim f^{\mathcal{N}}(b^1, \ldots, b^n)$$

となる．証明は「$A, B \in U$ のとき $A \cap B \in U$」を使えば簡単である．

補題 2.12 $t(x^1, \ldots, x^n)$ を $\mathcal{L}$ の項とする．$[a^1], \ldots, [a^n], [b] \in \mathcal{M}^*$ に対して，

$$t^{\mathcal{M}^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{\mathcal{M}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = b_i\} \in U.$$

証明 t が変数記号 x のときは自明．t が関数記号を一つだけ含むとき，

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{M}^*}([a^1],\ldots,[a^n])=[b] &\iff [f^{\mathcal{N}}(a^1,\ldots,a^n)]=[b] \\ &\iff \{i\in I: f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1,\ldots,a_i^n)=b_i\}\in U. \end{aligned}$$

あとは t の構成に関する帰納法で示せばよい．もっとも単純な場合を示しておく．t が $f(u)$ で，f は 1 変数関数記号，u は 1 変数の項とする．

$$\begin{aligned} & t^{\mathcal{M}^*}([a])=b \\ \iff & f^{\mathcal{M}^*}(u^{\mathcal{M}^*}([a]))=[b] \\ \iff & \text{適当な } [d] \text{ に対して } u^{\mathcal{M}^*}([a])=[d] \text{ かつ } f^{\mathcal{M}^*}([d])=[b] \\ \iff & \text{適当な } d \text{ に対して } \begin{cases} A=\{i\in I: u^{\mathcal{M}_i}(a_i)=d_i\}\in U \\ B=\{i\in I: f^{\mathcal{M}_i}(d_i)=b_i\}\in U. \end{cases} \end{aligned}$$

同値変形の最後の行が成り立てば $A\cap B\in U$ である（補題 2.5）．また $i\in A\cap B$ に対して，$f^{\mathcal{M}_i}(u^{\mathcal{M}_i}(a_i))=b_i$ である．よってこのとき $\{i\in I: t^{\mathcal{M}_i}(a_i)=b_i\}\in U$．逆に $\{i\in I: t^{\mathcal{M}_i}(a_i)=b_i\}\in U$ のとき，$d_i=u^{\mathcal{M}_i}(a_i)$ とおけば，最後の行を得る． ■

定理 2.13（ウルトラプロダクトの基本定理） $\varphi(x^1,\ldots,x^n)$ を $\mathcal{L}$ 論理式とする．任意の $[a^1],\ldots,[a^m]\in\mathcal{M}^*$ に対してつぎが成立する．

$$\mathcal{M}^*\models\varphi([a^1],\ldots,[a^n]) \iff \{i\in I:\mathcal{M}_i\models\varphi(a_i^1,\ldots,a_i^n)\}\in U.$$

証明 0) φ が原子論理式のときは補題 2.12 から明らか．あとは φ の構成に関する帰納法で示せばよい．

1) φ が $\neg\psi$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*\models\neg\psi([a^1],\ldots,[a^n]) &\iff \mathcal{M}^*\models\psi([a^1],\ldots,[a^n]) \text{ でない} \\ &\iff \{i\in I:\mathcal{M}_i\models\psi(a_i^1,\ldots,a_i^n)\}\notin U \\ &\iff \{i\in I:\mathcal{M}_i\models\psi(a_i^1,\ldots,a_i^n)\}^c\in U \\ &\iff \{i\in I:\mathcal{M}_i\models\psi(a_i^1,\ldots,a_i^n) \text{ でない }\}\in U \\ &\iff \{i\in I:\mathcal{M}_i\models\neg\psi(a_i^1,\ldots,a_i^n)\}\in U. \end{aligned}$$

2) φ が $\exists y\psi(x^1,\dots,x^n,y)$ のとき

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}^* \models \exists y\psi([a^1],\dots,[a^n],y)\\
\iff &\mathcal{M}^* \models \psi([a^1],\dots,[a^n],[b]) \quad (\exists b \in \mathcal{N})\\
\iff &\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(a_i^1,\dots,a_i^n,b_i)\} \in U \quad (\exists b \in \mathcal{N})\\
\iff &\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \exists y\psi(a_i^1,\dots,a_i^n,y)\} \in U.
\end{aligned}$$

3) その他の論理記号の場合も同様である． ■

系 2.14 φ を $\mathcal{L}$ 閉論理式とする．このとき，

$$\mathcal{M}^* \models \varphi \iff \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\} \in U.$$

U に属する集合は I の大きな部分集合である．この意味で，上の系 2.14 の主張を言葉で説明するとつぎのようになる．閉論理式 φ がウルトラプロダクト $\mathcal{M}^*$ 上で成立するのは，φ が多くの $\mathcal{M}_i$ たちの上で成立するときである．とくにすべての $\mathcal{M}_i$ が φ を満たせば，できたウルトラプロダクトは φ を満たす．

例 2.15 群の族のウルトラプロダクトは群となり，体の族のウルトラプロダクトは体となる．

例 2.16 F_i $(i \in I)$ が体のとき，$R = \prod_{i\in I} F_i$ は 1 をもつ環になる．$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする．例 2.9 で定義したように，I 上のウルトラフィルター $U_\mathfrak{m}$ を

$$U_\mathfrak{m} = \{Z_a \subset I : a \in \mathfrak{m}\}$$

で定義する．このとき，$a,b \in R$ に対して，$a + \mathfrak{m} = b + \mathfrak{m} \iff a - b \in \mathfrak{m} \iff Z_{a-b} \in U_\mathfrak{m} \iff [a] = [b]$．したがって，$R/\mathfrak{m} \cong R/U_\mathfrak{m}$ である．ただし，左辺は環 R をイデアル $\mathfrak{m}$ で割った体，右辺は R をウルトラフィルター $U_\mathfrak{m}$ で割ったウルトラプロダクトである．

問題 2.17 言語 $\mathcal{L}$ が定数記号 c，n 変数関係記号 P を含む場合にウルトラプロダクトを一般化せよ（ヒント：c の解釈を $[(c^{\mathcal{M}_i})_{i\in I}]$ で定義し，P の解釈を $\{([a^1],\dots,[a^n]) \in (\mathcal{M}^*)^n : \{i \in I : \mathcal{M}_i \models P(a_i^1,\dots,a_i^n)\} \in U\}$ で定義する）．

2.3 コンパクト性定理

ウルトラプロダクトの基本定理は非常に重要な定理である．この定理の系として，コンパクト性定理が得られる．

定理 2.18（コンパクト性定理） T を $\mathcal{L}$ 閉論理式からなる一つの集合とする．このときつぎの 2 条件は同値である．

1. T はモデルをもつ．
2. T の各有限部分はモデルをもつ．

証明 $1 \Rightarrow 2$ は明らかである．$2 \Rightarrow 1$ を示す．T の有限部分集合全体を I とおく．各 $S \in I$ に対して，$\mathcal{M}_S \models S$ となる $\mathcal{L}$ 構造を一つずつ選んでおく．$\varphi \in T$ に対して，

$$A_\varphi = \{S \in I : \mathcal{M}_S \models \varphi\}$$

と定義する．A_φ は I の部分集合である．A_φ たち全体の集合を F とおく．

主張 A $F \subset \mathcal{P}(I)$ は有限交叉性をもつ．

$A_{\varphi_1}, \ldots, A_{\varphi_n} \in F$ とする．このとき，$\mathcal{M}_{\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}}$ は各 φ_i のモデルになっているから，

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \in A_{\varphi_1} \cap \cdots \cap A_{\varphi_n}.$$

したがって，$A_{\varphi_1} \cap \cdots \cap A_{\varphi_n} \neq \emptyset$．（主張 A の証明終わり）

したがって，F を拡大して I 上のウルトラフィルター U をつくることができる（定理 2.7）．$\mathcal{M} = \prod_{S \in I} \mathcal{M}_S / U$ とおく．

主張 B $\mathcal{M} \models T$.

各 $\varphi \in T$ に対して，$\mathcal{M} \models \varphi$ を示せばよい．ウルトラプロダクトの基本定理により，$\{S \in I : \mathcal{M}_S \models \varphi\} \in U$ を示せばよい．しかしそれは，$A_\varphi \in U$ から，明らかに成立する． ■

例 2.19（自然数の超準モデルの存在） 自然数全体 $\mathbb{N}$ を $\{0,1,+,\cdot,<\}$ 構造と考える．c を新しい定数記号として，$T=\{\varphi:\mathbb{N}\models\varphi\}\cup\{c>n:n\in\mathbb{N}\}$ を考える（$c>n$ はこの言語では，$c>\underbrace{1+\cdots+1}_{n}$ と書かれている）．T の有限部分集合 T_0 が与えられたとき，T_0 のモデルが存在することを示す．T_0 はつぎの形（の部分集合）と思ってよい．

$$\{\varphi:\mathbb{N}\models\varphi\}\cup\{c>n_1,\ldots,c>n_k\}$$

c の解釈を $n=\max\{n_1,\ldots,n_k\}+1$ とすれば，$\mathbb{N}$ は T_0 のモデルになる．コンパクト性定理により，T 全体のモデル $\mathbb{N}^*$ が存在する．$\mathbb{N}^*$ をもともとの言語 $\{0,1,+,\cdot,<\}$ に制限して考えよう．つくり方から，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}$ と同型ではない．

例 2.20（濃度の表現不可能性） $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ が 3 個以上の元をもつということは，論理式 $\exists x_1\exists x_2\exists x_3[x_1\neq x_2\wedge x_2\neq x_3\wedge x_1\neq x_3]$ で表現される．同様に有限の n が与えられたとき，$\mathcal{L}$ 構造が n 個以上の元をもつということを表現する $\mathcal{L}$ 閉論理式 φ_n がある．このとき，「$\mathcal{M}\models\varphi_n\wedge\neg\varphi_{n+1}\iff\mathcal{M}$ の濃度は n」が成立する．しかし，

$$\mathcal{M}\models\varphi^*\iff\mathcal{M}\text{ は有限}$$

を成り立たせる $\mathcal{L}$ 閉論理式 φ^* は存在しない：このような φ^* が存在したとする．各有限の n に対して，濃度が n 以上の有限 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}_n$ が存在する．このことは，$T=\{\varphi^*\}\cup\{\varphi_n:n\in\mathbb{N}\}$ の各有限部分がモデルをもつことを意味する．したがって，T 全体にもモデル $\mathcal{M}$ が存在する．この $\mathcal{M}$ は無限だが φ^* を成り立たせているので矛盾．κ を無限基数とするとき，「$\mathcal{M}\models\varphi_\kappa\iff\mathcal{M}$ の濃度は κ」となる φ_κ も存在しないことがいえる．これはつぎの節で述べるレーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理からもわかる．

2.4 レーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理

以下において $\mathcal{M}$ は濃度が無限の $\mathcal{L}$ 構造とする．

補題 2.21 κ を無限基数とするとき，$\mathcal{M}$ の基本拡大で濃度が κ 以上のものが存在する．

証明 T^* を $\mathcal{M}$ の基本設計図とする（注意 1.15）．$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ に属さない新しい定数記号を κ 個用意する．それらを $\{c_i : i < \kappa\}$ とする．$(\mathcal{L}(\mathcal{M}) \cup \{c_i : i < \kappa\})$ 閉論理式の集合

$$T^{**} = T^* \cup \{c_i \neq c_j : i < j < \kappa\}$$

を考える．明らかに T^{**} の有限部分はモデルをもつ（有限個の c_i たちはすべて異なるように $\mathcal{M}$ の中で解釈してやることができる）．したがって，T^{**} のモデル $\mathcal{N}$ が存在し，$\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ と考えることができる．また T^{**} の条件から，$\mathcal{N}$ は κ 個の異なる元を有するので濃度は κ 以上である． ■

上の補題 2.21 は，構造の濃度を大きい方向に変えることができることを意味している．つぎに構造を小さくする方向を考える．その場合に重要なのが，基本部分構造の判定条件である．

補題 2.22（タルスキ・ヴォートの判定条件） $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．部分集合 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ に対して，つぎの 2 条件は同値である．

1. $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$.
2. 勝手な $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 論理式 $\varphi(x)$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) \Longrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(a) \text{ となる } a \in \mathcal{N} \text{ が存在する．}$$

証明 $1 \Rightarrow 2$：$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x)$ とする．$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ により，$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x)$．よって $\mathcal{N} \models \varphi(a)$ となる $a \in \mathcal{N}$ が存在する．$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ により，$\mathcal{M} \models \varphi(a)$ である．

$2 \Rightarrow 1$：条件 2 から，$\mathcal{N}$ は各関数記号の解釈 $f^{\mathcal{M}}$ で閉じていることがわかる[1)]．したがって $\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の部分構造である．$\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ の構成に関する帰納法でつぎを示す．

$$(*)\ \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad (\forall a_1, \dots, a_n \in \mathcal{N})$$

部分構造の定義から原子論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ に対しては，(*) は成立する．問題は $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が $\exists y \psi(y, x_1, \dots, x_n)$ の場合である．

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \exists y\, \psi(y, a_1, \dots, a_n) &\iff \mathcal{M} \models \psi(b, a_1, \dots, a_n) \quad (\exists b \in \mathcal{N}) \\ &\iff \mathcal{N} \models \psi(b, a_1, \dots, a_n) \quad (\exists b \in \mathcal{N}) \\ &\iff \mathcal{N} \models \exists y\, \psi(y, a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

ここで，1 行目の同値性は条件 2 による．また 1 行目と 2 行目の間の同値性は帰納法の仮定による． ■

補題 2.23 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．$A \subset \mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ でつぎの 2 条件を満たすものが存在する．

1. $A \subset \mathcal{N}$.
2. $\mathrm{card}\,\mathcal{N} \le \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0$

証明 $A_0 = A$ からはじめて，$\mathcal{M}$ の部分集合の上昇列 A_i $(i < \omega)$ をつぎの条件を満たすように帰納的に構成することができる．各 $i > 0$ に対して，

- $\mathcal{L}(A_{i-1})$ 論理式 $\varphi(x)$ が $\mathcal{M}$ に解をもてばそのうち少なくとも一つは A_i の中にある．

- $\mathrm{card}\,A_i \le \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0$.

実際，$\mathrm{card}\,A_i \le \mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0$ のとき，$\mathcal{L}(A_i)$ 論理式の数も $\mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0$ 以下なので，それらの論理式の解を一つずつ A_i に付加したものを A_{i+1} とすればよい．最終的にすべての A_i たちが定義された時点で，$\mathcal{N} = \bigcup_{i\in\omega} A_i$ とすれば，明らかに濃度に関する条件 2 は成立する．タルスキ・ヴォートの判定条件により，$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ となる． ■

1) $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 論理式 $f(\bar{b}) = x$ に対して条件 2 を考える．

定理 2.24（レーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理）T を $\mathcal{L}$ 閉論理式の一つの集合とする．T が無限モデルをもてば，任意の基数 $\kappa \geq \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0$ に対して，T のモデル $\mathcal{N}$ で濃度が κ になるものが存在する．

証明 $\mathcal{M}$ を T の無限モデルとする．補題 2.21 により，$\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ で濃度が κ 以上になるものが存在する．$A \subset \mathcal{M}^*$ を濃度が κ の集合とする．補題 2.23 により，A を含む $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}^*$ で濃度が $\mathrm{card}\,A + \mathrm{card}\,\mathcal{L} + \aleph_0 (= \kappa)$ 以下になるものが存在する．しかし，$\mathcal{N} \supset A$ だから $\mathrm{card}\,\mathcal{N} \geq \kappa$．よって，$\mathcal{N}$ の濃度はちょうど κ である． ■

系 2.25 $\mathcal{L}$ を可算言語とし，$\mathcal{M}$ を無限の $\mathcal{L}$ 構造とする．勝手な無限基数 κ に対して，$\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$, $\mathrm{card}\,\mathcal{N} = \kappa$ となる $\mathcal{N}$ が存在する．

問題 2.26 いわゆる「実数の公理」（完備順序体の公理）を満たす構造はすべて実数体 $\mathbb{R}$ と同型になることが知られている．この事実は上の系と矛盾しないか．

2.5 基本鎖定理と飽和モデル

$\{\mathcal{M}_i : i \in \omega\}$ を $\mathcal{L}$ 構造としての拡大列とする．各 $\mathcal{M}_i$ が T のモデルのとき，$\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i$ も T のモデルになるだろうか．T が「群の公理」や「体の公理」のときは大丈夫である．しかし，一般には正しくない．

例 2.27 各 $i \in \omega$ に対して，$\mathcal{M}_i = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq -i\}$ とする．$\mathcal{M}_i$ に通常の順序を入れて，$\{<\}$ 構造とみる．このとき，

- $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \cdots$ （$\{<\}$ 構造としての拡大列）.
- $\mathcal{M}_i \models$ "$<$ は最小元をもつ全順序 ".

が成立する．しかし，$\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i = \mathbb{Z}$ は最小元はもたない．

定義 2.28 α を順序数とする．$\mathcal{L}$ 構造の列 $\{\mathcal{M}_i\}_{i<\alpha}$ は条件

(*) $i < j < \alpha \implies \mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$

を満たすとき，長さ α の基本鎖あるいは初等鎖 (elementary chain) と呼ばれる．

定理 2.29（基本鎖定理） $\{\mathcal{M}_i\}_{i<\alpha}$ を基本鎖とする．このとき，集合 $\mathcal{M}^* = \bigcup_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ は自然に $\mathcal{L}$ 構造となり，各 $\mathcal{M}_i$ は $\mathcal{M}^*$ の基本部分構造になる．

証明 $\mathcal{M}^*$ 上に定数記号，関数記号，関係記号の解釈を導入する．$c^{\mathcal{M}^*}$ は一定の値 $c^{\mathcal{M}_i}$ とする．また，m 変数関係記号 P の解釈は $P^{\mathcal{M}^*} = \bigcup_{i<\alpha} P^{\mathcal{M}_i}$ とする．n 変数関数記号 f の解釈も（集合論的に書けば）$f^{\mathcal{M}^*} = \bigcup_{i<\alpha} f^{\mathcal{M}_i}$ とすればよい．$\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}^*$ を示そう．このためにはつぎの命題を $n \in \omega$ に関する帰納法で示せばよい．

$(*)_n$ 任意の $i < \alpha$ と論理記号の数が n 以下の任意の $\mathcal{L}(\mathcal{M}_i)$ 閉論理式 φ に対して，$\mathcal{M}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_i \models \varphi$ が成立する．

$n = 0$ のとき，すなわち φ が原子論理式のときは明らか．帰納法のステージでは，φ が $\exists x\psi(x)$ の形のときが本質的である（その他の論理記号については各自計算してみよ）．$\mathcal{M}^* \models \exists x\psi(x)$ とする．このとき，$\psi(x)$ の解 $d \in \mathcal{M}^*$ が存在するが，$\mathcal{M}^*$ はモデルの和の形をしているので，$d \in \mathcal{M}_j$ となる $\mathcal{M}_j$ がある．$i < j$ としてよい．帰納法の仮定から $\mathcal{M}_j \models \psi(d)$ である．よって，$\mathcal{M}_j \models \exists x\psi(x)$．$\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ だから $\mathcal{M}_i \models \varphi$．逆に $\mathcal{M}_i \models \exists x\psi(x)$ とする．$\mathcal{M}_i \models \psi(d)$ となる $d \in \mathcal{M}_i$ が存在する．帰納法の仮定により $\mathcal{M}^* \models \psi(d)$．よって $\mathcal{M}^* \models \exists x\psi(x)$ である． ■

定義 2.30（有限充足性とタイプ）

1. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とし，$A \subset \mathcal{M}$ とする．自由変数の列 $\bar{x}$ をもつ $\mathcal{L}(A)$ 論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ が $\mathcal{M}$ において有限充足的であるとは，任意有限個の $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_n(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \exists\bar{x}[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(\bar{x})]$$

が成立（共通解が存在）することである．$\Phi(\bar{x})$ が有限充足的で，なおかつ完全（すなわち任意の $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，$\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ または $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Phi(\bar{x})$ が成立）のとき，$\Phi(\bar{x})$ は $\mathcal{M}$ における A 上のタイプと呼ばれる．変数の数 n を強調したい場合は n 変数タイプという．

2. A 上のタイプ全体の集合を $\mathrm{S}_{\mathcal{M}}(A)$ と書く．$\mathcal{M}$ が明らかなときは，省略して $\mathrm{S}(A)$ と書く．自由変数が n 個の A 上のタイプの集合を $\mathrm{S}^n(A)$ と書く．したがって $\mathrm{S}(A) = \bigcup_n \mathrm{S}^n(A)$ である．
3. $p \in \mathrm{S}(A)$ のとき，A をタイプ p の領域 (domain) と呼び，$\mathrm{dom}(p)$ で表す．
4. $p(\bar{x})$ に属するすべての $\varphi(\bar{x})$ を満たす元を $p(\bar{x})$ の解という（解は $\mathcal{M}$ の中に存在するとは限らない）．

例 2.31

1. $\mathbb{N}$ を $\{<, +, 1\}$ 構造とみる．$\Phi(x) = \{x > 1, x > 1{+}1, x > 1{+}1{+}1, \ldots\}$ は $\mathbb{N}$ で有限充足的である．しかし，$\mathbb{N}$ に解をもたない．
2. $\overline{\mathbb{Q}}$ を代数的数の全体とする．「x は $\mathbb{Q}$ 上の超越数である」という条件は

$$\Phi(x) = \{f(x) \neq 0 : f \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 係数の 1 次以上の多項式}\}$$

という論理式の集合で表される．各多項式は有限個の解しかもたないので，$\Phi(x)$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ で有限充足的である．しかし，$\Phi(x)$ の解は $\overline{\mathbb{Q}}$ にない（拡大体の中には存在する）．

補題 2.32　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$\mathcal{L}(A)$ 論理式の集合 $\Phi(\bar{x})$ は $\mathcal{M}$ で有限充足的とする．$\Phi(\bar{x})$ は A 上のタイプに拡大される．

証明　$\Phi(x)$ を拡大した有限充足的な集合のうち極大なものが存在する（ツォルンの補題）．この極大集合がタイプになっている．■

問題 2.33　$p(x)$ を $\mathcal{M}$ におけるタイプとする．c を新しい定数記号として，$T = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}) \cup p(c)$ を考える．T はモデルをもつことを示せ（$p(c)$ は $\{\varphi(c) : \varphi(x) \in p(x)\}$ のことである．また $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}(\mathcal{M})}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ の基本設計図である）．

問題 2.34 $A \subset \mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ とする．$\mathcal{L}(A)$ 論理式の集合 $p(\bar{x})$ に対して，$p(\bar{x})$ が $\mathcal{M}$ においてタイプになることと $\mathcal{M}^*$ においてタイプになることは同値である．

つぎの補題はコンパクト性定理の簡単な応用である．

補題 2.35 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とする．κ を無限基数とする．このとき，つぎの条件を満たす基本拡大 $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ が存在する．

(*) $\mathcal{M}$ におけるタイプ p が $\mathrm{card}(\mathrm{dom}(p)) < \kappa$ を満たせば $\mathcal{M}^*$ に解をもつ．

証明 S を $\mathcal{M}$ におけるタイプで，条件 $\mathrm{card}(\mathrm{dom}(p)) < \kappa$ を満たすもの全体の集合とする．各 $p \in S$ に対して，新しい定数記号 c_p を用意して，

$$T^* = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}(\mathcal{M})}(\mathcal{M}) \cup \bigcup_{p \in S} p(c_p)$$

なる閉論理式の集合を考える．右辺第 2 項は各 c_p が p の解になることを主張している．タイプの有限充足性により，T^* の各有限部分はモデルをもつ．したがって，コンパクト性定理により T^* 全体もモデル $\mathcal{M}^*$ をもつ．$\mathcal{M}^*$ は $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}(\mathcal{M})}(\mathcal{M})$ のモデルだから $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ である．c_p の解釈が p の解になっているから，$\mathcal{M}^*$ は S に属する各タイプの解を少なくとも 1 つもつ．■

上で構成したモデル $\mathcal{M}^*$ は領域が $\mathcal{M}$ に属するタイプのうち，領域の大きさが小さい（κ 未満の）ものに対する解をもっている．しかし，領域が小さくても $\mathcal{M}$ からはみ出るタイプの解はないかもしれない．

定義 2.36（飽和性） $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とし，κ は無限基数とする．

1. $\mathcal{M}$ が $\mathrm{card}(\mathrm{dom}(p)) < \kappa$ なるすべてのタイプ p の解をもつとき，$\mathcal{M}$ は κ 飽和 (κ-saturated) であるという．
2. $\mathcal{M}$ が $\mathrm{card}\, \mathcal{M}$ 飽和のとき，$\mathcal{M}$ は飽和構造といわれる．

定理 2.37 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造とし，κ は無限基数とする．$\mathcal{M}$ の拡大 $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ で κ^+ 飽和なものが存在する（κ^+ は κ のつぎの無限基数）．

証明　$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ から始まる基本鎖 $\{\mathcal{M}_i\}_{i<\kappa^+}$ を以下のようにつくる．

1. $A \subset \mathcal{M}_i$, $\mathrm{card}\, A < \kappa^+$ ならば A 上のすべてのタイプは $\mathcal{M}_{i+1}$ に解をもつ．
2. δ が極限順序数のときは，$\mathcal{M}_\delta = \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i$.

補題 2.35 と基本鎖定理 2.29 により，このような基本鎖は存在する．$\mathcal{M}^* = \bigcup_{i<\kappa^+} \mathcal{M}_i$ が求める κ^+ 飽和な構造である．実際，$A \subset \mathcal{M}^*$ を濃度が κ 以下の集合とすれば，$A \subset \mathcal{M}_i$ となる $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}^*$ が存在する．したがって，A 上のすべてのタイプは $\mathcal{M}_{i+1} \prec \mathcal{M}^*$ で解をもつ（A 上のタイプの概念は $\mathcal{M}_{i+1}$ で考えても $\mathcal{M}^*$ で考えても同じになることに注意）．■

注意 2.38　可算言語 $\mathcal{L}$ で記述された理論 T を考える．定理の証明中で濃度が $2^{\aleph_0}$ のモデルの基本鎖を使えば，濃度が $2^{\aleph_0}$ で $\aleph_1$ 飽和になっている $\mathcal{M}^* \models T$ をつくることができる．同様に濃度が 2^κ で κ^+ 飽和になっている $\mathcal{M}^*$ もつくることができる．

補題 2.39　$\mathcal{M}$ を κ 飽和として，$A \subset \mathcal{M}$ を濃度が κ 未満の集合とする．$\Sigma(\{x_i\}_{i<\kappa})$ を自由変数が $\{x_i\}_{i<\kappa}$ に含まれる $\mathcal{L}(A)$ 論理式の集合とする．$\Sigma(\{x_i\}_{i<\kappa})$ が $\mathcal{M}$ で有限充足的ならば，その解 a_i $(i < \kappa)$ が $\mathcal{M}$ に存在する．

証明　$\Sigma(\{x_i\}_{i<\kappa})$ の有限部分集合 $F = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が与えられたとする．これらに現れる x_0 以外の自由変数を $\bar{x}$ として，論理式

$$\varphi_F(x_0) = \exists \bar{x}[\varphi_0(x_0, \bar{x}) \wedge \varphi_1(x_0, \bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_n(x_0, \bar{x})]$$

を考える．$\Sigma^*(x_0) = \{\varphi_F(x_0) : F$ は Σ の有限部分集合 $\}$ は $\mathcal{M}$ において有限充足的である．$\mathcal{M}$ の κ 飽和性により，$\Sigma^*(x_0)$ の解 $a_0 \in \mathcal{M}$ が存在する．このとき $\Sigma(\{x_i\}_{i<\kappa})$ の x_0 に a_0 を代入した論理式の集合 $\Sigma(\{a_0\} \cup \{x_i\}_{0<i<\kappa})$ を考えると，これも有限充足的（パラメータの集合は $A \cup \{a_0\}$ で，その濃度は κ 未満である）．したがって，上の議論と同様に x_1 に対する適当な解 $a_1 \in \mathcal{M}$ をみつけて，$\Sigma(\{a_0\} \cup \{a_1\} \cup \{x_i\}_{1<i<\kappa})$ を有限充足的にできる．以下同様に $a_2, a_3, \ldots \in \mathcal{M}$ をみつけてゆけば，結局 Σ の解が得られることになる．■

定義 2.40　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$A \subset \mathcal{M}$ とする．

1. $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$ の（$\mathcal{M}$ における）A 上のタイプ $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n/A)$ は

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

となる $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 全体の集合である．$\mathcal{M}$ が明らかなときは省略し，$\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n/A)$ と書く．また $A = \emptyset$ のときは，さらに簡単に $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n)$ と書く．

2. $\mathcal{M}$ の無限列 $\{a_i\}_{i<\alpha}$ の A 上のタイプ $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\{a_i\}_{i<\alpha}/A)$ はつぎの集合である．

$$\bigcup_{i_1<\cdots<i_n<\alpha} \{\varphi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) : \varphi \text{ は } \mathcal{L}(A) \text{ 論理式}, \mathcal{M} \models \varphi(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\}.$$

また集合 $B \subset \mathcal{M}$ に対して，$\mathrm{tp}(B/A)$ と書く場合は，B が適当な順序で並べられていると仮定する．

A 上のタイプ $p(\bar{x})$ が $\mathcal{M}$ に解をもつことは $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = p(\bar{x})$ となる $\bar{a} \in \mathcal{M}$ が存在することと同値である．また $\mathcal{M}$ が κ 飽和であることは，濃度が κ 未満の $A \subset \mathcal{M}$ 上のタイプがすべて $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ $(\bar{a} \in \mathcal{M})$ の形で書けることと同値になる．

問題 2.41　$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ とする．また $\mathcal{N}$ は $\aleph_0$ 飽和とする．$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ なるとき，勝手な $a \in \mathcal{M}$ に対して，適当に $b \in \mathcal{M}$ を選べば，$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}, b)$ とできる（ヒント：$p(\bar{x}, x) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, a)$ とする．条件 $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ から $p(\bar{b}, x)$ は $\mathcal{N}$ におけるタイプとなり，飽和性から解 $b \in \mathcal{N}$ をもつ．このとき，$\mathrm{tp}(\bar{a}, a) = \mathrm{tp}(\bar{b}, b)$ である）．

定理 2.42（飽和構造の一意性）　$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ はともに飽和な $\mathcal{L}$ 構造で濃度も等しいとする．このとき，$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ である．

証明　構造の濃度を κ として，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ の要素をつぎのように一列に並べる．

$$\mathcal{M} = \{a_i : i < \kappa\},\ \mathcal{N} = \{b_i : i < \kappa\}.$$

$\sigma_0 = \emptyset$ として，$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像の拡大列 $(\sigma_i)_{i<\kappa}$ を以下の 2 条件が成り立つように帰納的につくる．

1. $\mathrm{dom}(\sigma_i) \supset \{a_j; j < i\}$, $\mathrm{card}(\mathrm{dom}(\sigma_i)) \leq 2 \cdot \mathrm{card}\, i$;
2. $\mathrm{ran}(\sigma_i) \supset \{b_j : j < i\}$, $\mathrm{card}(\mathrm{ran}(\sigma_i)) \leq 2 \cdot \mathrm{card}\, i$.

σ_j $(j < i)$ まで構成されたとする．i が極限順序数のときは $\sigma_i = \bigcup_{j<i} \sigma_j$ とすれば 1, 2 は満たされる．$i = i_0 + 1$ とする．$\mathrm{dom}(\sigma_{i_0})$ は，条件 1 によりその濃度 λ は κ 未満である．$\mathrm{dom}(\sigma_{i_0}) = \{d_j\}_{j<\lambda}$ とする．このとき

$$p(x, \{x_j\}_{j<\lambda}) = \mathrm{tp}(a_{i_0}, \{d_j\}_{j<\lambda})$$

とする．σ_{i_0} が $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像なので，$p(x, \{\sigma_{i_0}(d_j)\}_{j<\lambda})$ は $\mathcal{N}$ 上のタイプになる．$\mathcal{N}$ の κ 飽和性により，$p(x, \{\sigma_{i_0}(d_j)\}_{j<\lambda})$ の解 $e \in |\mathcal{N}|$ が存在する．このとき，写像 $\tau = \sigma_{i_0} \cup \{(d_{i_0}, e)\}$ は $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像で，条件 1 を満たす．対称性から条件 2 も満たすように τ をさらに拡大し σ_i を得る．σ_i の構成で σ_{i_0} に対して増やしたのは高々2 つの対なので，濃度に関する条件も満たされている．σ_i たちがすべて構成されたとき，$\bigcup_{i<\kappa} \sigma_i$ が $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の同型写像となる． ■

上の証明のように，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の元を一列に並べておき，互いに埋め込んでゆく論法（部分同型を拡大してゆく方法）を往復論法 (back and forth argument) という．

問題 2.43 $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ で $\mathcal{N}$ は $\mathrm{card}\, \mathcal{M}$ 飽和とする．このとき，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{N}$ への基本埋め込みがある．すなわち，$\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ で $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像となるものが存在する（ヒント：上の定理 2.42 の証明を往路方向だけ行えばよい．また，タイプ $\mathrm{tp}(\mathcal{M})$ に対して補題 2.39 を用いてもよい）．

2.6 スコーレム関数

T を言語 $\mathcal{L}$ で記述された理論とする．各 $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ に対して，新しい関数記号 f_φ（変数の数は $\bar{y}$ の長さ）を用意する．$\mathcal{L}$ にこれらの関数 f_φ を

すべて付加した言語を $\mathcal{L}_{\mathrm{S}}$ と書くことにする．以下において，f_φ はスコーレム関数と呼ばれる．

定義 2.44　理論 T のスコーレム化 T_{S} は，T につぎの形の $\mathcal{L}_{\mathrm{S}}$ 論理式をすべて加えたものである．

$$\forall \bar{y}\,[\exists x \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})]\,.$$

補題 2.45　T のモデル $\mathcal{M}$ は，f_φ たちの解釈を追加することにより，T_{S} のモデル $\mathcal{M}^*$ に拡張できる．

証明　$\varphi(x, \bar{y})$ を $\mathcal{L}$ 論理式とする．$\bar{y}$ の長さを n とすれば，f_φ は n 変数関数記号である．各 $\bar{a} \in \mathcal{M}^n$ に対して，$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ が成立するとき，$b_{\bar{a}} \in \mathcal{M}$ を $\mathcal{M} \models \varphi(b_{\bar{a}}, \bar{a})$ が成立するように選んでおく．このとき，f_φ の $\mathcal{M}^*$ での解釈 $f_\varphi^{\mathcal{M}^*}$ を，

$$f_\varphi^{\mathcal{M}^*}(\bar{a}) = \begin{cases} b_{\bar{a}} & (\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})) \\ d & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$d \in \mathcal{M}$ は任意の元である．$\forall \bar{y}\,[\exists x \varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(f_\varphi(\bar{y}), \bar{y})]$ が $\mathcal{M}^*$ で成立する．■

$\mathcal{M}^*$ を構造 $\mathcal{M}$ のスコーレム化と呼ぶ．スコーレム関数の解釈 $f_\varphi^{\mathcal{M}^*}$ も単にスコーレム関数と呼ぶ．

定義 2.46　$\mathcal{M}^*$ を $\mathcal{M}$ のスコーレム化とする．$A \subset \mathcal{M}^*$ に対して，

$$Sk^1(A) = \{f_\varphi(\bar{a}) : \varphi(x, \bar{y}) \text{ は } \mathcal{L} \text{ 論理式}, \bar{a} \in A\}$$

とする．以下 Sk^{m+1} を $Sk^{m+1}(A) = Sk^1(Sk^m(A))$ によって帰納的に定義して，$\mathrm{Skolem}(A) = \bigcup_{m \in \omega} Sk^m(A)$ を A のスコーレム閉包と呼ぶ．

注意 2.47　論理式 $x = y$ に対するスコーレム関数 $f_{x=y}$ は恒等関数である．したがって，$\mathrm{Skolem}(A) \supset A$ である．

補題 2.48 $\mathcal{M}^*$ を $\mathcal{M}$ のスコーレム化とする．任意の $A \subset |\mathcal{M}^*|$ に対して，そのスコーレム閉包 Skolem(A) は $\mathcal{M}$ の（$\mathcal{L}$ 構造として）基本部分構造である．

証明 集合 Skolem(A) がタルスキ・ヴォートの判定条件（補題 2.22）を満たすことを示す．$\varphi(x, \bar{y})$ を $\mathcal{L}$ 論理式として，$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in \mathrm{Skolem}(A)$ とする．このとき，$\mathcal{M}^*$ は T_{S} のモデルだから，$\mathcal{M}^* \models \varphi(f_\varphi(\bar{a}), \bar{a})$ である．Skolem(A) はスコーレム関数で閉じているから，$f_\varphi(\bar{a}) \in \mathrm{Skolem}(A)$ である．■

2.7 ラムジーの定理と一様列

引き出しの数が有限個で，入れるものが無限個あれば，いずれかの引き出しには無限個のものを入れなければならない．これはいわゆる引き出し論法であるが，ラムジーの定理は，この論法の拡張にあたる．

以下では集合 X の有限部分集合で元の個数が n のもの全体を $[X]^n$ と書く．

定理 2.49（ラムジーの定理） n を自然数とする．また X, Y を集合として，

$$f : [X]^n \to Y$$

なる関数 f を考える．もし集合 X が無限集合で，Y が有限集合ならば，無限集合 $Z \subset X$ で，$f([Z]^n)$ が一点集合となるものが存在する．すなわち，任意の $A, B \in [Z]^n$ に対して，$f(A) = f(B)$ となる無限集合 $Z \subset X$ が存在する．

証明 $X = \omega$ と仮定してよい．$n = 1$ の場合は，引き出し論法そのものである．$n = 2$ の場合に定理を示すことにする（正確には n に関する帰納法による）．$X_0 = \omega$ として，ω の無限部分集合の列 $\{X_i : i \in \omega\}$ と点列 $\{a_i : i \in \omega\} \subset \omega$ および $\{y_i : i \in \omega - \{0\}\} \subset Y$ を帰納的に定義できる．

1. $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$.
2. $a_i = \min X_i$.

3. $f(\{a_i, b\}) = y_{i+1}$ $(\forall b \in X_{i+1})$.

実際 X_k, a_k まで定義されたとき，引き出し論法により，$y_{k+1} \in Y$ と無限集合 $X_{k+1} \subset X_k - \{a_k\}$ を選び，$f(\{a_k, b\}) = y_{k+1}$ $(\forall b \in X_{k+1})$ とできる．すべての i に対して，X_i, a_i, y_i が定義されたとする．y_i たちは有限集合 Y の元なので，再び引き出し論法により，無限集合 $I \subset \omega$ で $y_{i+1} = c = \mathrm{const}$ $(\forall i \in I)$ となるものがある．このとき，$Z = \{a_i : i \in I\}$ が求める無限集合である．実際 $i, j \in I$, $i < j$ のとき，$a_j \in X_j \subset X_{i+1}$．したがって，条件 3 と I の定義により，$f(\{a_i, a_j\}) = y_{i+1} = c$ となる． ■

例 2.50 人類の集合 X が仮に無限集合だったとする．このとき，無限部分集合 $X_0 \subset X$ を上手に選ぶとつぎのいずれかが成立する．(1) X_0 の中の任意の二人が知り合いであるか，(2) X_0 の中の任意の二人が知り合いでない．このことは，ラムジーの定理を用いて，つぎのように説明できる．関数 $f : [X]^2 \to \{0, 1\}$ を $f(\{a, b\}) = 1$（a, b が知り合いのとき），$f(\{a, b\}) = 0$（a, b が知り合いでない）と定義する．したがって，無限集合 $X_0 \subset X$ を選ぶことにより，$f(\{a, b\})$ の値が $a, b \in X_0$ によらず一定にできる．この一定値が 1 のときは，X_0 の中の二人がつねに知り合いであり，0 のときは X_0 の中の二人がつねに知り合いでない．

定義 2.51 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$I = \{\bar{a}_i\}_{i<\alpha}$ を $\mathcal{M}$ の元の（同じ長さ m の）有限列からなる列とする．

1. $\varphi(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n-1})$ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式（$\bar{x}_i$ たちの長さは m）とする．任意の $i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} < \alpha$ と $j_0 < j_1 < \cdots < j_{n-1} < \alpha$ に対して，

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_{n-1}}) \iff \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}_{j_0}, \ldots, \bar{a}_{j_{n-1}})$$

   が成立するとき，I は φ に関する一様列と呼ばれる．

2. $A \subset \mathcal{M}$ とする．I が任意の $\mathcal{L}(A)$ 論理式 φ に関して一様列になるとき，I は A 上の一様列と呼ばれる．また $A = \emptyset$ の場合は単に一様列と呼ばれる．

例 2.52　$I = \{\bar{a}_i\}_{i<\alpha}$ において，$\bar{a}_i$ がすべて同一の場合，I は明らかに一様列になる．これを自明な一様列と呼ぶ．

補題 2.53　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式とする．$\mathcal{M}$ の元の無限列 X が与えられたとき，X の無限部分列 I で φ に関して一様列になるものがある．

証明　$X = \{a_i\}_{i\in\omega}$ を $\mathcal{M}$ の元の列とする．$f : [X]^n \to \{0, 1\}$ を $i_0 < \cdots < i_{n-1} < \omega$ に対して，

$$f(\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-1}}\}) = \begin{cases} 0 & (\mathcal{M} \models \varphi(a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-1}})) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定義する．ラムジーの定理により，無限列 $I \subset X$ で，I に属する a_i たちに対しては，$f(\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-1}}\})$ の値が一定になるものがある．すなわち，I は φ に関する一様列となる．■

問題 2.54　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$A \subset \mathcal{M}$ とする．自由変数が $\{x_i : i < \alpha\}$ に含まれる $\mathcal{L}(A)$ 論理式の集合 $\Gamma(x_0, x_1, \ldots)$ で任意の $I = \{a_i\}_{i<\alpha}$ に対して，つぎの 2 条件が同値になるものが存在する．

1. I は A 上の一様列である．
2. I は Γ を満たす．

これを示せ（ヒント：$\Gamma_\varphi(x_0, x_1, \ldots) = \{\varphi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n-1}}) \leftrightarrow \varphi(x_{j_0}, \ldots, x_{j_{n-1}}) : i_0 < \cdots < i_{n-1}$ かつ $j_0 < \cdots < j_{n-1}\}$ とすれば，I が Γ_φ を満たすことと，φ に関して一様列になることは同値である．$\Gamma = \bigcup_\varphi \Gamma_\varphi$ を考えればよい）．

命題 2.55　$\mathcal{M}$ を κ 飽和な $\mathcal{L}$ 構造とする．また $A \subset \mathcal{M}$ を濃度が κ 未満の集合とする．このとき，濃度が κ の $I \subset \mathcal{M}$ で A 上の一様列となるものが存在する．

証明　変数 x_i $(i < \kappa)$ を用意して，問題 2.54 に出てくる $\Gamma(x_0, x_1, \ldots)$ を考える．補題 2.53 をくり返し用いると，有限個の $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ に対

して一様列となる無限集合 $I \subset \mathcal{M}$ の存在がいえる．これは $\Gamma(x_0, x_1, \ldots)$ が有限充足的になっていることを意味する．したがって，$\mathcal{M}$ の飽和性により，$\Gamma(x_0, x_1, \ldots)$ 全体を満たす $I = (a_i)_{i<\kappa}$ が存在する（補題 2.39）． ■

定義 2.56 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$A \subset \mathcal{M}$ とする．

1. $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ は，解を $\mathcal{M}$ に有限個しかもたないとき，$\mathcal{M}$ で代数的であるといわれる．
2. $\bar{a}$ を $\mathcal{M}$ の元の有限列とする．$p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ が代数的な論理式を含むとき，($\mathcal{M}$ において) $\bar{a}$ は A 上代数的であるといわれる．$A = \emptyset$ のときは，単に $\bar{a}$ は代数的であるといわれる．
3. A 上代数的な $\mathcal{M}$ の元全体を $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ と書き，A の $\mathcal{M}$ における代数閉包 (algebraic closure) と呼ぶ．$\mathcal{M}$ が明らかなときは省略し，$\mathrm{acl}(A)$ と書く．

問題 2.57 つぎを示せ．

1. $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ が代数的 $\iff$ 各 a_i が代数的．
2. $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$ が $\mathcal{M}$ において有限個の解しかもたないとしても，a は A 上代数的とは限らない（ヒント：$\mathcal{M}$ を無限集合として，$\emptyset$ 構造と考える．また $a \in \mathcal{M}$ として，$A = \mathcal{M} - \{a\}$ とおく．このとき，$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$ の解は a だけである．しかし，その $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a/A)$ 中の論理式で解が有限個のものはない）．
3. $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.
4. $\mathrm{card}(\mathrm{acl}(A)) \leq \mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, \mathcal{L} + \aleph_0$（ヒント：$\mathrm{card}\, A + \mathrm{card}\, \mathcal{L} + \aleph_0$ は $\mathcal{L}(A)$ 論理式の個数に対応する代数的な論理式は有限個の解しかもたない）．
5. 代数的でない論理式は代数的でないタイプに拡大される．

命題 2.58 $A \subset \mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ とする．このとき，$\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\varphi(x)$ が $\mathcal{M}$ で代数的なことと $\mathcal{M}^*$ で代数的なことは同値である．したがって，$\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}^*}(A)$ が成立する．

証明　$\varphi(x)$ がちょうど $n(\in\omega)$ 個の解をもつということは $\mathcal{L}(A)$ 閉論理式で表現できる．したがって，$\mathcal{M}\prec\mathcal{M}^*$ により，$\varphi(x)$ が $\mathcal{M}$ でちょうど n 個の解をもつことと $\varphi(x)$ が $\mathcal{M}^*$ でちょうど n 個の解をもつことは同値である．さらに，$\mathcal{M}\models\varphi(a)\implies\mathcal{M}^*\models\varphi(a)$ である．したがって，代数的な $\varphi(x)$ に対しては，$\varphi(x)^{\mathcal{M}}=\varphi(x)^{\mathcal{M}^*}$ が成り立つ．これより $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)=\mathrm{acl}_{\mathcal{M}^*}(A)$ もわかる．■

命題 2.59　$I=\{a_i : i\in\omega\}$ を A 上の一様列とする．I は $\mathrm{acl}(A)$ 上でも一様列になる．

証明　$\mathrm{acl}(A)$ 上で一様列にならないとする．このとき，A 上代数的な元 $b_1,\ldots,b_n$ が存在して，I は $b_1,\ldots,b_n$ 上一様列とならない．表現を簡単にするため，$n=1$ として，$b=b_1$ とおく．I が b 上一様列でないから，$\mathcal{L}(b)$ 論理式によって一様性が崩される．再び簡単のために（一般の場合は演習問題），ある $i<j$ に対して

$$\mathcal{M}\models\neg[\varphi(b,a_i)\leftrightarrow\varphi(b,a_j)]$$

となったとする．b が A 上代数的なことを示す $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\theta(x)$ をとれば，

$$\mathcal{M}\models\exists x[\theta(x)\wedge\neg[\varphi(x,a_i)\leftrightarrow\varphi(x,a_j)]]$$

である．I の A 上の一様性から，上の式は任意の $i<j<\omega$ で成立する．したがって，θ の解が有限個しかないことを考えて，ラムジーの定理を用い，I を I の無限部分列で置き換えて，さらに θ の解 d を選ぶと，

$$\mathcal{M}\models\neg[\varphi(d,a_i)\leftrightarrow\varphi(d,a_j)]$$

が任意の $i<j<\omega$ で成立する．しかしこれは不可能である．■

命題 2.60　$\mathcal{M}\prec\mathcal{M}^*$, $\mathcal{M}\subset A\subset\mathcal{M}^*$ とする．$\mathcal{M}^*$ の有限列よりなる列 $I=\{\bar{a}_i\}_{i\in\omega}$ に対して，$p_i(\bar{x})=\mathrm{tp}(\bar{a}_i/\mathcal{M}\cup\{\bar{a}_j\}_{j<i})$ とおく．またつぎの 2 条件を仮定する．

1. $p_i(\bar{x})\subset p_{i+1}(\bar{x})$ $(i\in\omega)$.

2. 各 $p_i(\bar{x})$ は $\mathcal{M}$ の元の列で有限充足的である（$p_i(\bar{x})$ の有限部分集合は $\mathcal{M}$ の中に解をもつ）．

このとき，I は $\mathcal{M}$ 上の一様列となる．

証明　$\mathcal{M}$ 上の一様列でないとすれば，部分列 $\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_n}$ ($i_0<\cdots<i_n$) と $\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_n}$ ($j_0<\cdots<j_n$) で $\mathcal{M}$ 上のタイプが異なるものが存在する．n をこのような中で最小に選ぶ．$m>\max\{i_n,j_n\}$ とするとき，条件 1 により，$\mathrm{tp}(\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_n}/\mathcal{M}) = \mathrm{tp}(\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_{n-1}},\bar{a}_m/\mathcal{M})$ および $\mathrm{tp}(\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_n}/\mathcal{M})=\mathrm{tp}(\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_{n-1}},\bar{a}_m/\mathcal{M})$ が成立する．したがって，$\mathrm{tp}(\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_{n-1}},\bar{a}_m/\mathcal{M}) \neq \mathrm{tp}(\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_{n-1}},\bar{a}_m/\mathcal{M})$ である．これらを区別する $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式 φ をとれば，

$$\mathcal{M}^* \models \varphi(\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_{n-1}},\bar{a}_m) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_{n-1}},\bar{a}_m).$$

$p_m(\bar{x})$ に対する条件 2 により，$\bar{d}\in\mathcal{M}$ を選んで，$\varphi(\bar{a}_{i_0},\dots,\bar{a}_{i_{n-1}},\bar{d}) \not\leftrightarrow \varphi(\bar{a}_{j_0},\dots,\bar{a}_{j_{n-1}},\bar{d})$ とできる．これは n の最小性に反する．■

注意 2.61　$\mathcal{M}\prec\mathcal{M}^*$, $\mathcal{M}\subset A\subset B\subset\mathcal{M}^*$ とする．$p(\bar{x})\in \mathrm{S}(A)$ が $\mathcal{M}$ の元で有限充足的ならば，$p(\bar{x})$ の拡大 $q(\bar{x})\in\mathrm{S}(B)$ で同じく $\mathcal{M}$ の元で有限充足的なものが存在する．したがって，命題 2.60 はモデル上の一様列を構成する一つの方法を与えている．

問題 2.62　$\mathcal{M}\prec\mathcal{M}^*$ とする．いま $a,b\in\mathcal{M}^*$ が $\mathcal{M}$ 上同じタイプをもつとする．$\mathcal{M}^*$ が十分大きな飽和性をもてば，無限列 $I\subset\mathcal{M}^*$ で $\{a\}\cup I$ と $\{b\}\cup I$ の両方を $\mathcal{M}$ 上の一様列にするものが存在する．これを示せ（ヒント：$p(x) = \mathrm{tp}(a/\mathcal{M})$ とする．$I=\{a_i\}_{i\in\omega}$ を $p_i=\mathrm{tp}(a_i/\mathcal{M}\cup\{a,b\}\cup\{a_j\}_{j<i})\supset p$ が命題 2.60 の条件 1, 2 を満たすように構成する）．

第3章

量化記号の消去

論理記号のうち $\forall$ と $\exists$ を量化記号あるいは限量記号という．与えられた命題が量化記号を使えば論理式で簡単に書けるが，使わなくても工夫をすれば書ける，という状況がある．たとえば $\mathbb{R}$ の上で考えたとき，

例 3.1

- 「方程式 $ax+b=0$ に実数解がある」という命題は，そのまま論理式 $\exists x[ax+b=0]$ で表現される．これは論理式 $a=0 \to b=0$ と同値である．

- 「方程式 $ax^2+bx+c=0$ に異なる 2 つの実数解がある」という命題は論理式 $\exists x \exists y[x \neq y \wedge ax^2+bx+c=0 \wedge ay^2+by+c=0]$ で表現される．これは $a \neq 0 \wedge b^2-4ac>0$ という論理式と同値である．

そこで，つぎの定義を与える．

定義 3.2 T を $\mathcal{L}$ で書かれた理論とする．

1. $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ が原子論理式のブール結合[1)]で書けるとき，量化記号のない論理式といわれる．

---

1) F に属する論理式に論理演算（$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$）をくり返し適用してできる論理式を F のブール結合という．

2. 任意の $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ [2)]が T のもとで量化記号のない論理式 $\psi(\bar{x})$ と同値になるとき，T は量化記号の消去を許すという．すなわち $T \models \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})]$ になるとき，T は量化記号の消去を許すという（ここで $T \models \theta$ は任意の $\mathcal{M} \models T$ で $\mathcal{M} \models \theta$ となることを意味する）．
3. $\bar{a}$ を $\mathcal{M}$ の元の有限列，$A \subset \mathcal{M}$ とする．$\bar{a}$ によって満たされる量化記号のない $\mathcal{L}(A)$ 論理式全体の集合を $\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ あるいは簡単に $\mathrm{qftp}(\bar{a}/A)$ [3)]と書く．さらに，$A = \emptyset$ のときは単に $\mathrm{qftp}(\bar{a})$ と書く．

3.1 消去の判定

補題 3.3 T が量化記号の消去を許すとする．また $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ とする．このとき，$\mathcal{M}$ の元の有限列 $\bar{a}$ と $\mathcal{N}$ の元の有限列 $\bar{b}$ に対して，$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}) \implies \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$.

証明 表現を簡単にするために，$\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$ とする．$\mathrm{qftp}(a) = \mathrm{qftp}(b)$ を仮定し，$\varphi(x) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a)$ とする．量化記号の消去により，量化記号のない論理式 $\psi(x)$ で $T \models \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$ となるものがある．このとき $\psi(x) \in \mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(a)$ である．よって $\psi(x) \in \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(b)$ である．再び $T \models \forall x[\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)]$ により，$\varphi(x) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(b)$ を得る．対称性から $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(b)$ を得る．■

補題 3.4 T を完全として，$\mathcal{M}$ を T の $\aleph_0$ 飽和なモデルとする．$\mathcal{M}$ の元の有限列 $\bar{a}, \bar{b}$ に対して，「$\mathrm{qftp}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}(\bar{b}) \implies \mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$」がつねに成立すれば，$T$ は量化記号の消去を許す．

証明 $\varphi(\bar{x})$ が量化記号をもたない論理式とは同値にならないとする．$\mathcal{M} \models \forall\bar{x}[\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x})]$ となる量化記号をもたない論理式 $\psi(\bar{x})$ 全体の集合を $\Psi(\bar{x})$ とする．$\{\varphi(\bar{x})\} \cup \{\neg\psi(\bar{x}) : \psi \in \Psi\}$ は有限充足的である．したがって，その解 $\bar{a} \in \mathcal{M}$ がある．また $\mathrm{qftp}(\bar{a}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ も有限充足的である．よって解

2) ここで $\bar{x}$ は空列 $\emptyset$ ではないとする．
3) qftp は quantifier free type の意味．

$\bar{b} \in \mathcal{M}$ がある．これは仮定「$\mathrm{qftp}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}(\bar{b}) \implies \mathrm{tp}(\bar{a}) = \mathrm{tp}(\bar{b})$」に反する． ■

命題 3.5 T は量化記号のない閉論理式に対しては完全とする．このとき，T に関するつぎの 3 条件は同値である．

1. T は完全でなおかつ量化記号の消去を許す．
2. $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ とし，$\mathcal{N}$ は $\aleph_0$ 飽和とする．有限列 $\bar{a} \in \mathcal{M}, \bar{b} \in \mathcal{N}$ が
$$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$$
を満たせば，任意の $a \in \mathcal{M}$ に対して，$b \in \mathcal{N}$ を選ぶことにより
$$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, a) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}, b)$$
とできる．
3. 条件 2 において，$\mathcal{N}$ を $(|\mathcal{L}| + \aleph_0)^+$ 飽和，$\bar{a}, \bar{b}$ を有限列でなく長さが $(|\mathcal{L}| + \aleph_0)$ 以下の列とした条件．

証明 最初に $(|\mathcal{L}| + \aleph_0)$ は $\mathcal{L}$ 論理式の個数を表していることに注意する．

1 ⇒ 2：補題 3.3 を使う．T が量化記号の消去を許せば，「$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}) \Rightarrow \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$」が成り立つ．このことに注意すれば明らか（問題 2.41 参照）．

2 ⇒ 3：2 を仮定して，3 を示す．$p(\bar{x}, x) = \mathrm{qftp}(\bar{a}, a)$ とおく（$\bar{a}$ はいまの場合無限列である）．$\bar{x}$ の中の有限個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に注目する．p に属する論理式の中で自由変数が $x_1, \ldots, x_n, x$ に含まれるものを集めて $q(x_1, \ldots, x_n, x)$ とする．条件 2 から $q(b_1, \ldots, b_n, x)$ は解 b をもつ．このことは $p(\bar{b}, x)$ の $\mathcal{N}$ における有限充足性を示す．よって，$\mathcal{N}$ の飽和性により $p(\bar{b}, b)$ となる $b \in \mathcal{N}$ が存在する．この b が求めるものである．

3 ⇒ 1：簡単のために $\mathcal{L}$ は可算とする．3 であるが 1 でないと仮定して矛盾を導く．T は完全でないか，または，量化記号の消去をしない．

最初に T は完全だが，量化記号を消去しない場合を扱う．量化記号のない論理式に対しては完全となる集合 $q(\bar{x})$ と論理式 $\varphi(\bar{x})$ をみつけて，$T \cup q(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$

と $T \cup q(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ の両方がモデルをもつようにできる（補題 3.4）．したがって，$\aleph_1$ 飽和な T のモデル $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ を選び，$\bar{a} \in \mathcal{M}$ は $q(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$ の解，$\bar{b} \in \mathcal{N}$ は $q(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(\bar{x})\}$ の解とできる．$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ を $\bar{a} \in \mathcal{M}_0$ となる可算モデルとする（$\bar{a}$ のスコーレム閉包を考えればよい）．$\mathcal{M}_0$ の元を一列にならべて，順に条件 3 を用いることにより，$\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ を $\bar{b} \in \mathcal{N}_0$ でかつ，$\mathrm{qftp}(\bar{a}, \mathcal{M}_0) = \mathrm{qftp}(\bar{b}, \mathcal{N}_0)$ となるように選ぶことができる．つぎに $\mathcal{N}_1 \prec \mathcal{N}$ を $\mathcal{N}_0$ の拡大となる可算モデルとする．これに対して条件 3 を使って，$\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ を $\mathcal{M}_0$ の拡大で，$\mathrm{qftp}(a, \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) = \mathrm{qftp}(b, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1)$ となるように選ぶ．以下同様に条件 3 をくり返し使って，偶数番目は $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$ をとり，奇数番目は先に $\mathcal{N}_i \prec \mathcal{N}$ を選んで，

$$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}, \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(\bar{b}, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \ldots)$$

が成り立つようにする．偶数 i に対して $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$ だから，$\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$．同様に $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{N}_i \prec \mathcal{N}$．また上の等式は $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{M}_i$ と $\bigcup_{i\in\omega} \mathcal{N}_i$ の間に $\bar{a}$ を $\bar{b}$ におくる同型写像があることを意味する．これらから $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(\bar{b})$ を得る．このことは $\bar{a} \in \mathcal{M}, \bar{b} \in \mathcal{N}$ のとり方に反する．

つぎに T が完全でない場合は，$T \cup \{\varphi\}, T \cup \{\neg\varphi\}$ がともにモデルをもつように閉論理式 φ をとる．後は上の場合と同じ証明で矛盾にいたる．注意すべきは，今回は $\bar{a}, \bar{b}$ が空列の場合から始めるので，T が量化記号のない閉論理式に対して完全である，という仮定が必要になる． ■

3.2 実閉体

タルスキによる実閉体の量化記号消去について述べる．実閉体の公理にはいくつかの同値なものが知られているが，われわれは以下のかなり技術的なものを採用する．

定義 3.6 環の言語を $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$，順序環の言語を $\mathcal{L}_{\mathrm{or}} = \mathcal{L}_{\mathrm{ring}} \cup \{<\}$ とする．

1. 順序体の公理は言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ で書かれた閉論理式の集合で，(1) 体の公理，および (2) $<$ が算法と両立すること，を主張する公理からなる．
2. 実閉体の公理 RCOF (real closed ordered field) とは言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ でかかれたつぎの閉論理式の集合のことである．(1) 順序体の公理，(2) 任意の 1 変数多項式は 1 次式 $x-a$ および 2 次式 x^2+bx+c（ただし $D=b^2-4c<0$）の形の因子の積で表される．
3. 実閉体（順序体）の公理を満たす $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ 構造を実閉体（順序体）という．

問題 3.7　RCOF の公理 (2) が閉論理式の集合として表現されることを調べよ．

補題 3.8　つぎが成り立つ．

1. $\mathbb{R}$ が実閉体になることはみやすい：実係数の多項式が複素数解 $a+bi$ をもてば，$a-bi$ も解である（$a,b\in\mathbb{R}$）．よって，$x^2+2ax+(a^2+b^2)$ で割れる．また，$D=-4b^2<0$ である．
2. 実閉体では，奇数次の方程式は解をもつ：奇数次多項式 $f(x)$ を分解すれば，必ず $(x-a)$ の形の因子をもつ．
3. 実閉体では正の数は必ず平方数として表される：$a>0$ として，x^2-a を考える．$D=4a>0$ だから，x^2-a は 1 次因子の積に表されなければならない．すなわち，$x^2-a=(x+b)(x-b)=x^2-b^2$ となる．

事実 3.9　順序体 K は実閉体への拡大をもつ．また，それら実閉体への拡大の中で最小なもの（実閉包）が存在する．

定理 3.10　実閉体の公理 RCOF は完全でなおかつ量化記号の消去を許す．

証明　RCOF のモデルは標数が 0 である．したがって，RCOF は量化記号のない閉論理式については完全である．$\mathcal{M},\mathcal{N}$ を RCOF の $\aleph_1$ 飽和なモデルとする．

$\mathcal{M}$ の元の可算無限列 $\bar{a}$ と $\mathcal{N}$ の元の可算無限列 $\bar{b}$ の qftp が等しいとする．したがって $\bar{a}$ で生成される順序体 $K_{\bar{a}}\subset\mathcal{M}$ と $\bar{b}$ で生成される順序体 $L_{\bar{b}}\subset\mathcal{N}$ は $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ 同型になる．よって，さらにそれらの実閉包 $K\subset\mathcal{M}$ と $L\subset\mathcal{N}$ の間

にも $\bar{a}$ を $\bar{b}$ に移す $\mathcal{L}_{\mathrm{or}}$ 同型がある．すなわち K と L を適当な順序で並べて列をつくれば，$\mathrm{qftp}(K) = \mathrm{qftp}(L)$ となる．ここで $\bar{a} \in K$ の現れる位置と $\bar{b} \in L$ の現れる位置は同じである．$a \in \mathcal{M}$ を勝手にとる．

$$\mathrm{qftp}(K, a) = \mathrm{qftp}(L, b)$$

となる $b \in \mathcal{N}$ の存在が示されれば，命題 3.5 により定理が示されたことになる．$a \notin K$ と仮定してよい．このとき，$\mathrm{qftp}(a/K)$ は自明でない方程式 $f(x) = 0$ をもたない．なぜなら，自明でない方程式 $f(x) = 0$ を a が満たしたとする．f に現れる 2 次の因子 $(x^2 + bx + c)$ は 0 にならない（$D < 0$ の条件に注意）．よって f の因子に $(x - a)$ が存在する．これは $a \in K$ を意味する．したがって，$\mathrm{qftp}(a/\bar{a}, K)$ は $f_i(x), g_i(x) \in K[x]$ たちを用いて，

$$\{f_i(x) \neq 0 : i < \omega\} \cup \{g_i(x) > 0 : i < \omega\}$$

の形と考えてよい．しかし $f(x) \neq 0$ は $f(x) > 0 \vee f(x) < 0$ と同値なことと $\mathrm{qftp}(a/K)$ が量化記号のない論理式に対して完全なことを考え合わせれば，

$$\mathrm{qftp}(a/K) = \{g_i(x) > 0 : i < \omega\}$$

の形と思ってよい．上の中から有限個の $g_0(x) > 0, \ldots, g_n(x) > 0$ をとる．含まれる K のパラメータを対応する L の元で置き換えた $g_0^*(x) > 0, \ldots, g_n^*(x) > 0$ を考える．これらの共通解 $b' \in L$ の存在が示されれば，(L の飽和性により）求めたい $b \in L$ の存在がわかる．実閉体の条件 (2) を使って，各 $g_i(x)$ を $K[x]$ で分解する．

$$g_i(x) = d \prod_{j \in J_1} (x - a_j) \prod_{j \in J_2} (x^2 - b_j x + c_j). \tag{3.1}$$

$e \in K$ に対応する L の元を e^* と書くと，$\mathrm{qftp}(K) = \mathrm{qftp}(L)$ により，

$$g_i^*(x) = d^* \prod_{j \in J_1} (x - a_j^*) \prod_{j \in J_2} (x^2 - b_j^* x + c_j^*). \tag{3.2}$$

(3.1) において，$d \prod_{j \in J_2} (x^2 - b_j x + c_j)$ の符号は x によらず一定だから，両端が $\{a_j : j \in J_1\} \cup \{\pm\infty\}$ に含まれる区間 $I_{i,1}, \ldots, I_{i,k_i}$ を選んで $\forall x (g_i(x) >$

$0 \leftrightarrow x \in \bigcup_{j \le k_i} I_{i,j})$ とできる．$I_{i,j}$ たちの選び方は a_j たちの大きさだけに依存していることに注意する．$I_{i,j}$ の両端の元を，対応する L の元で置き換えた区間を $I^*_{i,j}$ で表せば，$\forall x(g^*_i(x) > 0 \leftrightarrow x \in \bigcup_{j \le k_i} I^*_{i,j})$ が成立することが (3.2) よりわかる．したがって，

$$\bigwedge_{i=0,\dots,n} g^*_i(x) > 0 \leftrightarrow x \in \bigcap_{i=0,\dots,n} \bigcup_{j \le k_i} I^*_{i,j}$$

となる．$\mathrm{qftp}(K) = \mathrm{qftp}(L)$ だから（とくに対応する元の間で大小関係が保存されているので）右辺の $\bigcap_{i=0,\dots,n} \bigcup_{j \le k_i} I^*_{i,j}$ は空でない．したがって，その解 $b' \in L$ が存在する．同値性から b' は $\bigwedge_{i=0,\dots,n} g^*_i(x) > 0$ の解にもなっている． ■

3.3　代数的閉体

定義 3.11　環の言語 $\mathcal{L}_{\mathrm{ring}}$ で書かれたつぎの二つの閉論理式の集合

1. 体の公理，および
2. 各 $n \in \omega - \{0\}$ に対して，n 次代数方程式が解をもつことを主張する論理式 $\forall a_0 \cdots \forall a_n[a_0 \neq 0 \to \exists x(a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0)]$

を代数閉体の公理と呼び，ACF で表す．ACF にその体の標数が p であることを付加した公理を ACF_p と書く．

注意 3.12　標数が $p > 0$ であることは，論理式 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p} = 0$ で表される．また標数が 0 ということは，無限個の閉論理式 $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} \neq 0$ $(n \in \omega)$ で表される．

定理 3.13（代数閉体の量化記号消去）　ACF_p は完全でなおかつ量化記号の消去を許す．

証明　最初に，ACF_p では標数 p が決定されているので，ACF_p は量化記号のない閉論理式に対しては完全になっている．したがって，命題 3.5 を使うこ

とができる．$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を $\aleph_0$ 飽和な ACF_p のモデルとする．$\bar{a} \in \mathcal{M}$ と $\bar{b} \in \mathcal{N}$ が同じ qftp をもっていると仮定する．$a \in \mathcal{M}$ を勝手にとる．対応する $b \in \mathcal{N}$ がとれればよい．

場合 1　a が $\bar{a}$ 上超越的なとき：$\mathcal{N}$ は $\aleph_0$ 飽和だから，$\bar{b}$ 上の超越元 $b \in \mathcal{N}$ が存在する．このとき，$\mathrm{qftp}(\bar{a}, a) = \mathrm{qftp}(\bar{b}, b)$ である．実際 "$f(\bar{x}, x) = 0$" $\in \mathrm{qftp}(\bar{a}, a)$ とすれば，a の超越性から f は x を真には含まない（x に関する多項式として係数はすべて 0）．よって，$\mathrm{qftp}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}(\bar{b})$ により，$f(\bar{b}, x)$ の係数もすべて 0．よって，$f(\bar{b}, b) = 0$ である（"$f \neq 0$" $\in \mathrm{qftp}(\bar{a}, a)$ ならば "$f \neq 0$" $\in \mathrm{qftp}(\bar{b}, b)$ も同様に示される）．

場合 2　a が $\bar{a}$ 上代数的なとき：$k_{\bar{a}}, k_{\bar{b}}$ をそれぞれ $\bar{a}, \bar{b}$ で生成される体とする．$\mathrm{qftp}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}(\bar{b})$ より，$\mathrm{qftp}(k_{\bar{a}}) = \mathrm{qftp}(k_{\bar{b}})$ も成立している．$f(x) \in k_{\bar{a}}[x]$ を a の $k_{\bar{a}}$ 上の最小多項式とする．$f(x)$ の係数を対応する $k_{\bar{b}}$ の元で置き換えた多項式を $f_1(x)$ とする．$\mathcal{N}$ が ACF_p のモデルなので，$f_1(x) = 0$ の解 $b \in \mathcal{N}$ が存在する．

$$\mathrm{qftp}_{\mathcal{M}}(k_{\bar{a}}, a) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{N}}(k_{\bar{b}}, b)$$

となることを示す．そのためにはつぎの二つの主張を示せばよい．

主張 A　$k_{\bar{a}}$ 上の多項式 $g(x)$ に対して，$\mathcal{M} \models g(a) = 0 \Rightarrow \mathcal{N} \models g_1(b) = 0$. ただし，$g_1$ は g の係数を対応する $k_{\bar{b}}$ の元で置き換えた多項式.

$\mathcal{M} \models g(a) = 0$ とする．$f(x)$ は a の $k_{\bar{a}}$ 上の最小多項式なので，$g(x)$ を割り切る．すなわち $k_{\bar{a}}$ 上の多項式 $h(x)$ を用いて，$g(x) = f(x) \cdot h(x)$ の形で書かれている．このとき，$g_1(x) = f_1(x) \cdot h_1(x)$ となる．$b \in \mathcal{N}$ は $f_1(x) = 0$ の解なので，b は $g(x) = 0$ も満たす.

主張 B　$f_1(x)$ は b の $k_{\bar{b}}$ 上の最小多項式である（したがって，対称性から上の主張 A の逆も成立する）.

$f_1(x)$ が最小多項式でなければ，$f_1(x) = g_1(x) \cdot h_1(x)$ となる 1 次以上の多項式 $g_1(x), h_1(x) \in k_{\bar{b}}[x]$ が存在する．このとき，それぞれの多項式の係数を対応する $k_{\bar{a}}$ の元で置き換えれば，$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ となり，f が最小多項式（よって既約）であることに反する．■

第4章
eq 構造

4.1 多領域言語と構造

最初に直観的な話をする．通常の言語 $\mathcal{L}$ では，変数の動く範囲はとくに指定されていない．すなわち，どの変数も自由に領域全体を動くものと想定されている．しかし本稿でも行っているように，α, β は順序数を表し，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ は $\mathcal{L}$ 構造を表すなど，文字の種類によってその指し示す対象を暗黙のうちに指定している場合がある．したがって，変数にも種類をつくり，その変数の動く範囲を領域のある指定された部分に制限することは，理論上も応用上も有用である．このことに対応するのが多領域言語 (many sorted language) であり，その言語に対応する構造が多領域構造である．

集合 $\mathcal{S}$ を用意する．$\mathcal{S}$ の元 s は変数のソート（種類，sort）を表す．各 $s \in \mathcal{S}$ に対して，変数の集合 V_s（$s \neq t \Rightarrow V_s \cap V_t = \emptyset$）が用意されている．$V_s$ の元はソート s をもつ変数と呼ばれる．$\mathcal{L}$ を言語とし，関数 $\sigma : \mathcal{L} \to \mathcal{S}^{<\omega}$（各記号に対して $\mathcal{S}$ の有限列を対応させる）を考える．対 $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \sigma)$ はつぎの 3 条件を満たすとき，ソートの集合 $\mathcal{S}$ をもつ言語と呼ばれる．

- $c \in \mathcal{L}$ が定数記号ならば，$\sigma(c) \in \mathcal{S}$.

- $F \in \mathcal{L}$ が n 変数関数記号ならば，$\sigma(F) \in \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}$.

- $P \in \mathcal{L}$ が m 変数関係記号ならば，$\sigma(P) \in \mathcal{S}^m$.

記号 $X \in \mathcal{L}$ に対して $\sigma(X)$ を X のソートと呼ぶ．以下で $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \sigma)$ をソート $\mathcal{S}$ をもつ言語とする.（ソートがない）言語の場合と同様に，$\overline{\mathcal{L}}$ における項，論理式，$\overline{\mathcal{L}}$ 構造などが定義される.

定義 4.1 $\overline{\mathcal{L}}$ の項は以下のように，帰納的に定義される.

1. ソートが s の変数はソートが s の項である.
2. $\sigma(c) = s$ なる定数記号 $c \in \mathcal{L}$ は，ソートが s の項である.
3. $F \in \mathcal{L}$ が $\sigma(F) = (s_1, \ldots, s_n, s)$ なる n 変数関数記号で，各 $i = 1, \ldots, n$ に対して t_i がソート s_i の項ならば，$F(t_1, \ldots, t_n)$ はソート s の項である.

定義 4.2 $\overline{\mathcal{L}}$ の原子論理式は，以下のように帰納的に定義される.

1. $P \in \mathcal{L}$ が $\sigma(P) = (s_1, \ldots, s_m)$ なる m 変数関係記号で，各 $i = 1, \ldots, m$ に対して t_i がソート s_i の項ならば，$P(t_1, \ldots, t_m)$ は原子論理式である.
2. t, u がともにソート s の項ならば，$t = u$ は原子論理式である（等号は各ソートごとに用意するが，煩雑になるのを避けるため，すべて $=$ で表現する）.

定義 4.3 $\overline{\mathcal{L}}$ の論理式は，以下のように帰納的に定義される.

1. 原子論理式は論理式である.
2. φ, ψ が論理式で，$x \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} V_s$ ならば，

$$\varphi \land \psi,\ \varphi \lor \psi,\ \varphi \to \psi,\ \neg\varphi,\ \forall x\varphi,\ \exists x\varphi$$

はすべて論理式である.

定義 4.4 $\mathcal{M}_s$ $(s \in \mathcal{S})$ を互いに共通部分をもたない空でない集合とする．また，$\mathcal{L}$ の各記号 X に対して，つぎの 3 条件を満たす $\iota(X)$（X の解釈と呼ばれる）が対応している.

1. $c \in \mathcal{L}$ がソート s の定数記号のとき，$\iota(c)$ は $\mathcal{M}_s$ の元である.

2. $f \in \mathcal{L}$ がソート $(s_1, \ldots, s_n, s)$ の関数記号ならば，$\iota(f)$ は $\iota(f) : \mathcal{M}_{s_1} \times \cdots \times \mathcal{M}_{s_n} \to \mathcal{M}_s$ なる関数である．
3. $P \in \mathcal{L}$ がソート $(s_1, \ldots, s_m)$ の関係記号ならば，$\iota(P)$ は $\mathcal{M}_{s_1} \times \cdots \times \mathcal{M}_{s_m}$ の部分集合である．

このとき，対 $\overline{\mathcal{M}} = ((\mathcal{M}_s)_{s \in \mathcal{S}}, \iota)$ を，一つの $\overline{\mathcal{L}}$ 構造と呼ぶ．$\mathcal{M}_s$ はソート s に対応する領域と呼ばれる．また $\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{M}_s$ を $\overline{\mathcal{M}}$ の領域と呼ぶ．

$\overline{\mathcal{M}}$ が $\overline{\mathcal{L}}$ 構造のとき，X の解釈 $\iota(X)$ を簡単に $X^{\overline{\mathcal{M}}}$ と書く．この記法のもとでは，$\overline{\mathcal{M}}$ は

$$((\mathcal{M}_s)_{s \in \mathcal{S}}, (X^{\overline{\mathcal{M}}})_{X \in \mathcal{L}})$$

と表すことができる．

注意 4.5 $\overline{\mathcal{L}}$ 構造 $\overline{\mathcal{M}}$，$\overline{\mathcal{L}}$ 論理式 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$，および $a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{M}_s$ に対して，充足関係

$$\overline{\mathcal{M}} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

を，ソートのない場合と同様に帰納的に定義することができる（x のソートが s のとき，$\exists x$ の意味は，$\mathcal{M}_s$ に属する元の存在である）．ソートをもつ言語とその構造に対してもコンパクト性定理，タイプの排除定理（後述：定理 5.4）など重要な定理が適当な書き換えのもとで成立する．

4.2 仮想元をもつ構造——eq 構造

$\mathcal{L}$ を通常の言語とする．$\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ に対して，多領域言語の構造 $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$[1)] を定義したい．簡単に述べるとつぎのようになる．$\mathcal{M}$ において論理式で定義可能な同値関係 E を考える．E による $\bar{a}$ の同値類を $\bar{a}_E$ と書くとき，これらを $\mathcal{M}$ に付加してできる新しい構造 $\mathcal{M} \cup \{\bar{a}_E\}_{E, \bar{a}}$ が $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ である．新しく付加される元 $\bar{a}_E$ を仮想元と呼ぶ．

1) eq は equivalance を省略したものである．

$\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ をより正確に定義しよう．以下で同値関係といえば，$\mathcal{M}$ において，適当な $2n$ 変数の $\mathcal{L}$ 論理式 $E(\bar{x},\bar{y})$ によって定義される同値関係を指す．各同値関係 $E(\bar{x},\bar{y})$ に対して，ソート s_E を用意して，これらソート全体を $\mathcal{S}$ と書く．等式 $x=y$ も同値関係である．ソート $s_=$ を原種と呼ぶことにする．ソートの集合 $\mathcal{S}$ をもつ言語 $\overline{\mathcal{L}}=(\mathcal{L}^{\mathrm{eq}},\sigma)$ をつぎで定義する．

- $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}=\mathcal{L}\cup\{F_E\}_E$，ただし E は同値関係すべてを動き，E が $2n$ 変数論理式のとき，新しい関数記号 F_E は n 変数の関数記号である．
- $\sigma(c)=s_=$（c は $\mathcal{L}$ の定数記号）．
- $\sigma(f)=(\overbrace{s_=,\dots,s_=,s_=}^{n+1})$ （f は $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号）．
- $\sigma(P)=(\overbrace{s_=,\dots,s_=,s_=}^{m})$ （P は $\mathcal{L}$ の m 変数関数記号）．
- $\sigma(F_E)=(\overbrace{s_=,\dots,s_=}^{n},s_E)$ （$E=E(\bar{x},\bar{y})$ は $2n$ 変数の同値関係）．

$\overline{\mathcal{L}}$ 構造 $\overline{\mathcal{M}}=((\mathcal{M}_s)_{s\in\mathcal{S}},\iota)$ を以下のように定義する．ただし，記号 X の解釈 $\iota(X)$ は $X^{\overline{\mathcal{M}}}$ と書くことにする．

- $\mathcal{M}_{s_=}=\mathcal{M}$.
- 等号以外の $2n$ 変数の同値関係 E に対しては，$\mathcal{M}_{s_E}=\{\bar{a}_E:\bar{a}\in\mathcal{M}^n\}$.（$\bar{a}_E$ は $\bar{a}$ の属する E による同値類である）．
- $c^{\overline{\mathcal{M}}}=c^{\mathcal{M}}$（$c$ は $\mathcal{L}$ の定数記号），$f^{\overline{\mathcal{M}}}=f^{\mathcal{M}}$（$f$ は $\mathcal{L}$ の関数記号），$P^{\overline{\mathcal{M}}}=P^{\mathcal{M}}$（$P$ は $\mathcal{L}$ の関係記号）．
- $F_E^{\overline{\mathcal{M}}}:\mathcal{M}^n\to\mathcal{M}_{s_E}$，$F_E^{\overline{\mathcal{M}}}(\bar{a})=\bar{a}_E$（$E=E(\bar{x},\bar{y})$ は $2n$ 変数の同値関係）．

上で定義した $\overline{\mathcal{M}}$ を $\mathcal{M}$ 上の eq 構造と呼び，$\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ で表す．

定義 4.6 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}$ 構造として，$\mathcal{N} = (|\mathcal{N}|, c^{\mathcal{N}}, \ldots, F^{\mathcal{N}}, \ldots, P^{\mathcal{N}}, \ldots)$ を $\mathcal{L}_0$ 構造とする．$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の中に翻訳可能（あるいは解釈可能，interpretable）であるとは，$\mathcal{N}$ と同型な構造が $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ の中に定義可能なことである．すなわち，ソート s_E，単射 $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_{s_E}$，$\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$ 論理式 $\delta(x)$ と，各記号 $X \in \mathcal{L}_0$ に対する $\mathcal{L}^{\mathrm{eq}}$ 論理式 $\varphi_X(\bar{x}_X)$[2] でつぎの 4 条件を満たすものが存在する．

1. $\sigma(\mathcal{N}) = \delta(x)^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}$.

2. $\sigma(c^{\mathcal{N}})$ は $\varphi_c(x_c)$ の唯一つの解である．

3. $f^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_n) = b \iff \mathcal{M}^{\mathrm{eq}} \models \varphi_f(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n), \sigma(b))$ $(\forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathcal{N})$.

4. $(a_1, \ldots, a_m) \in P^{\mathcal{N}} \iff \mathcal{M}^{\mathrm{eq}} \models \varphi_P(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_m))$ $(\forall a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{N})$.

例 4.7 $\mathcal{L}$ 構造 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}$ に自明に翻訳可能である：$\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ において，$\mathcal{M}$ は原種 $s_=$ に対応する領域であり，変数 $x \in V_{s_=}$ を用いて，論理式 $x = x$ で定義される．また $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ において，$\mathcal{L}$ の解釈は $\mathcal{M}$ でのそれと同じである．

例 4.8 整数全体の群 $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, 0, +)$ は自然数全体の構造 $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, 0, +)$ に翻訳可能である：$\mathbb{N}^2$ 上の同値関係 $E(x, y, u, v)$ を

$$x + v = y + u$$

で定義する．$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^2/E$ を $f(m) = (k_m + m, k_m)_E$ で定義する．ただし k_m は $k_m + m \geq 0$ となる十分大きな自然数である．また x, y, z を $\mathcal{M}_{s_E} = \mathbb{N}^2/E$ 上の変数として，$\varphi_0(x)$, $\varphi_+(x, y, z)$ を

- $\varphi_0(x)$: $x = F_E(0, 0)$,
- $\varphi_+(x, y, z)$: $\exists x_1 \exists x_2 \exists y_1 \exists y_2 \exists z_1 \exists z_2 (x_1 + y_1 + z_2 = x_2 + y_2 + z_1 \wedge F_E(x_1, x_2) = x \wedge F_E(y_1, y_2) = y \wedge F_E(z_1, z_2) = z)$

---

2) $\bar{x}_X$ は変数列である．

と定めれば，翻訳可能性の定義 4.6 を満たす．

注意 4.9 論理式 $E(\bar{x}, \bar{y})$ が $\mathcal{M}^n$ 上の同値関係でなく，論理式で定義される部分集合 $D \subset \mathcal{M}^n$ 上の同値関係になる場合を考える．新しい同値関係 $E^*(\bar{x}, \bar{y})$ を

$$\bar{x} = \bar{y} \vee E(\bar{x}, \bar{y})$$

で定義すれば，E^* は $\mathcal{M}^n$ 全体の上の同値関係になる．このとき，$D/E = \{\bar{a}_E : \bar{a} \in D\}$ と $\mathcal{M}_{s_{E^*}}$ の定義可能集合

$$\{F_{E^*}(\bar{a}) : \bar{a} \in D\}$$

を同一視できる．したがって，必ずしも $\mathcal{M}^n$ 全体の上で定義されていない同値関係に対しても，それによる仮想元が $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ の中に存在していると考えられる．

注意 4.10 同値関係 $E(x, y)$ がパラメータをもつ論理式の場合を考える．したがって E は正確には $E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ の形をしている．論理式 $\theta(\bar{z}) \in \mathrm{tp}(\bar{a})$ を $\theta(\bar{b})$ なるすべての $\bar{b}$ に対して，$E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{b})$ が同値関係になるように選ぶ．新しい関係 $E^*(\bar{x}, \bar{z}; \bar{y}, \bar{w})$ を

$$E(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \wedge \theta(\bar{z}) \wedge \bar{z} = \bar{w}$$

で定義する．E^* はパラメータなしで定義される同値関係になる．したがって，仮想元 $\bar{d}_E$ を $(\bar{d}, \bar{a})_{E^*}$ と同一視することにより，パラメータを使って定義される同値関係の仮想元も $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ の中にあると思ってよい．

例 4.11 整数のなす環 $\mathbb{Z}$ において，$D = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y \neq 0\}$ を考える．D 上の同値関係 $E(x, y, u, v)$ を

$$x \cdot v = y \cdot u$$

で定義する．$\mathbb{Z}^{\mathrm{eq}}$ の部分集合 D/E は有理数全体のなす体 $\mathbb{Q}$ と同一視できる．すなわち，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ に翻訳可能である．

注意 4.12　数の拡大

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

を考える（言語は $\{0, 1, +, \cdot\}$ としておく）．上の例では，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Z}$ に翻訳可能であることを示した．同様の議論により，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ に翻訳可能であり，$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ に翻訳可能となる．たとえば，後者については，$\mathbb{C}$ が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の全体と同一視できることから明らかであろう．しかし，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ で翻訳可能ではない．もし翻訳可能ならば，$\mathbb{R}$ は何らかの同値関係 E に対して，$\mathbb{Q}^n/E$ の形になる．ところが $\mathbb{Q}^n/E$ は可算集合である．$\mathbb{R}$ は非可算なのでこのようなことは起こりえない．

では，逆向きの関係はどうだろう．たとえば $\mathbb{N}$ は $\mathbb{Z}$ の中で定義可能（翻訳可能）になるだろうか．$\leq$ が言語に入っていれば，$0 \leq x$ によって，$\mathbb{N}$ は定義可能である．いまの場合，言語に $\leq$ はないが，任意の自然数（非負整数）が 4 つの整数の 2 乗の和 $k^2 + l^2 + m^2 + n^2$ の形で書けることを使うと $\leq$ が論理式で書ける．すなわち，$x \leq y$ を $\exists k, l, m, n[x + k^2 + l^2 + m^2 + n^2 = y]$ で定義できる．またロビンソンの結果により，$\mathbb{Q}$ の中で $\mathbb{Z}$ が定義可能なことも知られている．しかし，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で定義可能ではないし，$\mathbb{R}$ も $\mathbb{C}$ で定義可能でない．このことは，量化記号の消去によりわかる．

問題 4.13　$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で定義可能でないこと，および $\mathbb{R}$ が $\mathbb{C}$ で定義可能でないことを量化記号の消去を使って証明せよ（ヒント：$\mathbb{R}$ の定義可能集合は（1 点集合も含めた）区間の有限和になることを示せ．また $\mathbb{C}$ の定義可能集合は有限集合か補有限集合になることを示せ）．

4.3　eq 構造と定義可能性

$\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ の中で $\mathcal{M}$ は定義可能な部分集合であり，$\mathcal{M}$ の上の $\mathcal{L}$ 構造は $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ においても存在している．とくに，$D \subset \mathcal{M}^n$ が $\mathcal{M}$ において論理式で定義可能ならば，$\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ においても論理式で定義可能になる．この逆が成立することを示そう．

定理 4.14　$D \subset \mathcal{M}^n$ に対して，つぎの 2 条件は同値である．

1. D は $\mathcal{M}$ において定義可能集合である．
2. D は $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ において定義可能集合である．

証明　$1 \Rightarrow 2$ は明らかである．$2 \Rightarrow 1$： D を定義する論理式を $\varphi(\bar{x})$ とする．$\bar{x}$ は原種に属する変数である．$\varphi(\bar{x})$ に現れるソート s_E の束縛変数 y は原種変数 $\bar{z}$ を用いて，$F_E(\bar{z})$ の形で置き換えることができる．したがって，$\varphi(\bar{x})$ の中に現れる変数はすべて原種だと仮定してよい．関数記号 F_E たちが $\varphi(\bar{x})$ の中に現れるとき，その部分は $F_E(t) = F_E(u)$ の形をしている（t, u は $\mathcal{L}$ の項）．しかしこれは $\mathcal{L}$ 論理式 $E(t, u)$ と同値になる．よって，置き換えにより，$\varphi(\bar{x})$ は同値な $\mathcal{L}$ 論理式に変形される．■

第5章
範疇性

本章では $\mathcal{L}$ は可算言語として，T は $\mathcal{L}$ で記述された完全な理論とする．

レーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理（定理 2.24）によれば，無限構造の濃度を閉論理式の集合で規定することはできなかった．すなわち言語 $\mathcal{L}$ で記述された理論 T が無限モデルをもてば，$\mathcal{L}$ の濃度以上のすべての基数 κ に対して，濃度 κ の T のモデルが存在する．

では，与えられた濃度では T のモデルはどれだけ存在するのか．実は濃度が与えられても，その濃度をもつモデルは一般には一つに定まらない．そこで濃度 κ の T のモデルの（同型を除いた）個数を $I(\kappa, T)$ で表す．$I(\kappa, T) = 1$ となるとき，T は κ 範疇的 (κ-categorical) という．とくに $\aleph_0$ 範疇性は可算範疇性ともいわれる．

5.1　$\aleph_0$ 範疇性

本節の主定理はつぎのものである．この定理はリルナルジェフスキによる．

定理 5.1　T に関するつぎの 2 条件は同値である．

1. T は $\aleph_0$ 範疇的である．
2. 各自然数 n に対して，自由変数 $x_1, \ldots, x_n$ をもつ T での n 変数タイプは有限個しかない．

5.1.1 定理 5.1 のいくつかの例

最初にいくつか例をあげる．

例 5.2

1. $\mathcal{L} = \emptyset$ として，T は領域が無限であることを主張する理論とする．すなわち，各自然数 n に対して，φ_n を $\exists x_1, \ldots, x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j$ として，φ_n たち全体の集合を T とおく．このとき，T は $\aleph_0$ 範疇的となる．
2. $\mathcal{L} = \{<\}$ として，T をつぎの 2 条件を表現する閉論理式の集合とする．
   - $<$ は稠密な全順序である．
   - 最大元と最小元は存在しない．

   このとき，T は $\aleph_0$ 範疇的になる．これを示そう．$(\mathcal{M}, <)$，$(\mathcal{N}, <)$ を二つの T の可算モデルとする．$\mathcal{M} = \{a_i\}_{i\in\omega}$，$\mathcal{N} = \{b_i\}_{i\in\omega}$ のようにそれぞれの領域を一列に並べておく．$\mathcal{M}$ の部分構造と $\mathcal{N}$ の部分構造の間の同型（部分同型）$\sigma_i : A_i \to B_i$ たちを以下の 3 条件を満足するように帰納的につくる．

   (a) $A_0 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots$ は $\mathcal{M}$ の有限部分集合の上昇列．
   (b) $B_0 \subset \cdots \subset B_i \subset B_{i+1} \subset \cdots$ は $\mathcal{N}$ の有限部分集合の上昇列．
   (c) $a_i \in A_{2i}$, $b_i \in B_{2i+1}$.

   $\sigma_0 = \emptyset$ として σ_i まで構成されたとする．対称性から $i = 2n-1$ としてよい．σ_i を拡大して，その定義域に a_n が入るようにすればよい．a_n が A_i のどの元よりも小さい（大きい）ときは，a_n の行く先 $b \in \mathcal{N}$ として B_i のどの元よりも小さい（大きい）元をとればよい．$c < a_n < d$ となる $c, d \in A_i$ が存在するとしよう（c, d は a_n に一番近いものをとっておく）．σ_i が順序を保存するので，$\sigma(c) < \sigma(d)$ である．$\mathcal{N}$ が稠密なので $b \in \mathcal{N}$ を $\sigma(c) < b < \sigma(d)$ となるように選べる．a_n の行く先を b とすればよい．すなわち，$A_{i+1} = A_i \cup \{a_n\}$, $B_{i+1} = B_i \cup \{b\}$, $\sigma_{i+1} = \sigma_i \cup \{\langle a_n, b\rangle\}$ とすればよい．σ_i たちがすべて構成されたとき，$\bigcup_{i\in\omega} \sigma_i$ は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の同型を与える．

3. F を有限体とする．言語を $\mathcal{L} = \{0, +\} \cup \{f_a : a \in F\}$ とする．ただし，f_a は 1 変数の関数記号である．F 上の無限次元ベクトル空間の公理 T は $+$ をベクトルの加法，f_a をベクトルのスカラー倍（a 倍）として，言語 $\mathcal{L}$ で記述することができる．ベクトル空間は次元によって決定されることから，T は $\aleph_0$ 範疇的である．同じ理由により，F が可算無限の体（たとえば $\mathbb{Q}$）のときは，$I(\aleph_0, T) = \aleph_0$ である．

5.1.2 タイプの排除定理

$p(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{L}$ 論理式の集合とする．$p(x_1, \ldots, x_n)$ は，$T \cup p(x_1, \ldots, x_n)$ が整合的（すなわちモデルをもつ）となる中で（包含関係に関し）極大なとき，T でのタイプと呼ばれる．T でのタイプには 2 種類ある．基本的に一つの論理式で代用できるものと，そうでないものである．前者を孤立的タイプ (isolated type) といい，後者を非孤立的タイプという．正確にはつぎのように定義される．

定義 5.3 $\Sigma(\bar{x})$ を $\mathcal{L}$ 論理式の集合とする．

1. つぎの 2 条件を満たす $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi(\bar{x})$ があるとき，$\Sigma(\bar{x})$ は T で孤立的であるという．
   (a) $T \cup \{\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})\}$ はモデルをもつ．
   (b) T の任意のモデル $\mathcal{M}$ において，$\varphi(\bar{x})$ の解はつねに $\Sigma(\bar{x})$ の解になる（このことを $T \models \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}) \to \Sigma(\bar{x})]$ と書く．また $\varphi(\bar{x})$ は $\Sigma(\bar{x})$ を生成するという）．
2. $\Sigma(\bar{x})$ が $\mathcal{M}$ に解をもたないとき，$\Sigma(\bar{x})$ は $\mathcal{M}$ で排除 (omit) されるという．

T が完全ならば，孤立的な $\Sigma(\bar{x})$ は，どんな T のモデルの中にも解をもつ．このことはつぎのように示される．T が完全ならば，$T \cup \{\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})\}$ がモデルをもつという条件 (a) は，T のすべてのモデルが $\varphi(\bar{x})$ の解をもつことを意味し，その解は条件 (b) により $\Sigma(\bar{x})$ の解となる．

定理 5.4（タイプの排除定理）　$\Sigma(x)$ が T で孤立的でなければ，$\Sigma(x)$ を排除する T のモデルが存在する．

証明　$\mathcal{L}$ に属さない可算個の新しい定数記号 $\{c_i : i \in \omega\}$ を用意する．$\mathcal{L}_i = \mathcal{L} \cup \{c_j : j < i\}$ とおく．$\mathcal{L} \cup \{c_i : i \in \omega\}$ に属する 1 変数論理式を一列にならべて $\varphi_i(x)(i \in \omega)$ とする．ただし，$\varphi_i(x)$ は $\mathcal{L}_i$ 論理式になるようにしておく．したがって，正確には $\varphi_i(x)$ は $\varphi_i(x, c_0, \ldots, c_{i-1})$ の形をしている．$T_0 = T$ として，$\mathcal{L}_i$ 閉論理式の整合的集合 $T_i(i \in \omega)$ を順次定義してゆく．T_i まで定義されたとする．このとき T_{i+1} は

$$T_i \cup \{\exists x \varphi_i(x, \bar{c}) \to \varphi_i(c_i, \bar{c})\} \cup \{\neg \sigma(c_i)\}$$

の形で，$\sigma(x) \in \Sigma(x)$ は T_{i+1} が整合的になるように選ぶ．ただし，$\bar{c} = c_0, \ldots, c_{i-1}$ である．実際に T_{i+1} を整合的にする $\sigma \in \Sigma$ が存在することを示そう．もし $\sigma \in \Sigma$ のとり方によらず，T_{i+1} がモデルをもたなかったとする．このとき，$T_i \models (\exists x \varphi_i(x, \bar{c}) \to \varphi_i(c_i, \bar{c})) \to \Sigma(c_i)$．$T_i$ の中の T 以外の部分は有限個なので，それらをまとめて（$\wedge$ でつなげて）$\theta(\bar{c})$ と書く．また c_i は $c_0, \ldots, c_{i-1}$ と異なる新しい定数記号なので，変数記号 z で置き換えて，

$$T \models \forall z \, [\theta(\bar{c}) \wedge (\exists x \varphi_i(x, \bar{c}) \to \varphi_i(z, \bar{c})) \to \Sigma(z)]$$

を得る．$\theta(\bar{c}) \wedge (\exists x \varphi_i(x, \bar{c}) \to \varphi_i(z, \bar{c}))$ を $\psi(z, \bar{c})$ とおけば，$T \models \forall z[\psi(z, \bar{c}) \to \Sigma(z)]$．定数記号の列 $\bar{c}$ は $\mathcal{L}$ に属さないので，

$$T \models \forall z[\exists \bar{y} \psi(z, \bar{y}) \to \Sigma(z)].$$

T_i がモデルをもつことから，$\exists \bar{y} \psi(z, \bar{y})$ は T と整合的である．よって，上の式は Σ が T で孤立的なことを意味する．これは矛盾である．

以上から，T_i たちが構成された．$T^* = \bigcup_{i \in \omega} T_i$ とおいて，$\mathcal{M}^* \models T^*$ をとる．$\mathcal{M}^*$ の中の必要な部分 $\mathcal{M} = \{c_i^{\mathcal{M}^*} : i \in \omega\}$ だけを抜き出す．T_{i+1} のつくり方から，

$$\mathcal{M}^* \models \exists x \varphi_i(x) \implies \mathcal{M}^* \models \varphi(c_i^{\mathcal{M}^*})$$

が成り立つ．$\varphi_i(x)$ たちはすべての 1 変数 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式を網羅しているので，タルスキ・ヴォートの判定条件により，$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ がわかる．また，T_i のつくり方から，各 c_i に対して，$\neg\sigma(c_i) \in T_i$ となる $\sigma \in \Sigma$ があるので，$\mathcal{M}$ は Σ の解をもたない． ■

注意 5.5 タイプの排除定理において言語の可算性は本質的である．T を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の公理に $\vec{v}_i \neq 0$ $(i \in \omega)$ を加えた理論とする（$\vec{v}_i$ は定数記号）．$\Sigma(x) = \{x \neq q\vec{v}_i : i \in \omega,\ q \in \mathbb{Q}\}$ は絶対に排除されないが，$\Sigma(x)$ を生成する論理式はない．

問題 5.6（拡張されたタイプの排除定理） 各 $i \in \omega$ に対して，$\Sigma_i(x)$ を T で孤立的でない論理式の集合とする．このとき，すべての $\Sigma_i(x)$ を排除する T のモデルが存在する．これを示せ（ヒント：タイプの排除定理の証明で T_i から T_{i+1} をつくる箇所を工夫する．T_{i+1} の定義で各 c_j $(j \leq i)$ が $\Sigma_i(x)$ を満たさないことを保証するように $\sigma_i(x) \in \Sigma_i(x)$ を選ぶことができる．$T^* = \bigcup_{i\in\omega} T_i$ は，各 c_n がどの $\Sigma_i(x)$ も満たさないことを保証する）．

注意 5.7 タイプの排除定理において，孤立的でない Σ は 1 変数の場合を扱った．しかし一般の $\Sigma(\bar{x})$ に対しても同様の主張が成立する．タイプの排除定理の証明と平行した証明を与えることができる．

5.1.3 可算範疇性の特徴づけ

証明 [定理 5.1 の証明] $1 \Rightarrow 2$：対偶を示す．2 でないから，ある $n \in \omega$ に対して，n 変数タイプが無限個ある．表現を簡潔にするために $n = 1$ と仮定し，$p_i(x)$ $(i < \alpha)$ を 1 変数タイプの全体とする（α は無限順序数）．

主張 A 孤立的でない $p_i(x)$ が存在する．

すべてのタイプが孤立的とする．このとき，各 $i < \alpha$ に対して，$p_i(x)$ を生成する $\mathcal{L}$ 論理式 $\varphi_i(x) \in p_i(x)$ がとれる．このとき $T \cup \{\neg\varphi_i(x) : i < \alpha\}$ は整合的になるので，$\{\neg\varphi_i(x) : i < \alpha\}$ はタイプ $p(x)$ に拡大される．したがって，$p(x) = p_m(x)$ となる $m < \alpha$ がある．しかし，この二つのタイプは $\varphi_m(x)$ によって区別されているので，矛盾である．(主張 A の証明終わり)

主張 A で保証される非孤立的タイプ $p_i(x)$ を考える．タイプの排除定理により $p_i(x)$ の解をもたない T の可算モデル $\mathcal{M}$ が存在する．一方，$p_i(x)$ の解をもつ T の可算モデル $\mathcal{N}$ はコンパクト性により存在する．$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ は同型でない T のモデルとなる．よって T は $\aleph_0$ 範疇的でない．

$2 \Rightarrow 1$：各 $n \in \omega$ に対して，n 変数タイプの数が有限個とする．

主張 B　すべてのタイプ $p(x_1, \ldots, x_n)$ は孤立的である．

他の場合も同じなので，1 変数タイプの場合を考える．$p_1(x), \ldots, p_m(x)$ を（x を自由変数としてもつ）1 変数タイプの全体とする．それらをお互いに区別する論理式 $\varphi_i(x) \in p(x)$ が存在する．このとき $\varphi_i(x)$ が $p_i(x)$ を生成している．実際，もし生成していなければ，$\varphi_i(x)$ を含むタイプが最低 2 個存在するので，タイプの個数が $m+1$ 個以上になってしまう．(主張 B の証明終わり)

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を T の二つの可算モデルとする．$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ を示せばよい．$\mathcal{M} = \{a_i : i \in \omega\}, \mathcal{N} = \{b_i : i \in \omega\}$ として，$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像の拡大列 $\sigma_i : A_i \to B_i$ $(i \in \omega)$ を以下の 4 条件を満足するように帰納的につくる．

1. $\sigma_0 = \emptyset$.
2. $A_i = \mathrm{dom}(\sigma_i)$ は $\mathcal{M}$ の有限部分集合.
3. $B_i = \mathrm{ran}(\sigma_i)$ $(= \{\sigma_i(a) : a \in A_i\})$ は $\mathcal{N}$ の有限部分集合.
4. $a_i \in A_{2i}$, $b_i \in B_{2i+1}$.

対称性から σ_{2n-1} まで定義されたとして，その拡大 σ_{2n} をつくる．a_n が σ_{2n} の定義域 A_{2n} に入るように拡大すればよい．A_{2n-1} を 1 列に並べたものを $\bar{a}$ とする．

$$p(x, \bar{y}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_n, \bar{a})$$

なるタイプを考える．主張 B により，$p(x, \bar{y})$ を生成する論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ をとることができる．$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$ である．ここで σ が $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 基本写像なることにより

$$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \sigma(\bar{a}))$$

である．よって$\mathcal{N} \models \varphi(d, \sigma(\bar{a}))$ となる $d \in \mathcal{N}$ がある．$\varphi(x, \bar{y})$ が $p(x, \bar{y})$ を生成しているので，列 $d, \sigma(\bar{a})$ もタイプ $p(x, \bar{y})$ を満たす．よって $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_n, \bar{a}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{N}}(d, \sigma(\bar{a}))$ を得る．$\sigma_{2n} = \sigma_{2n-1} \cup \{(a_n, d)\}$ とすればよい．以上ですべての i に対して σ_i が定義された．最終的に $\sigma = \bigcup_{i \in \omega} \sigma_i$ とすれば，σ も基本写像である．また条件 $a_i \in A_{2i}$, $b_i \in B_{2i+1}$ により，σ は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間の全単射になる．よって，$\sigma : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ である．■

5.2 $\aleph_1$ 範疇性

κ^* を十分大きな無限基数として，$\mathcal{M}^*$ を κ^* 飽和な T のモデルとする．今後このモデルの中で議論する．すなわち，$A, B, \ldots$ などは濃度が κ^* 未満の $\mathcal{M}^*$ の部分集合として，$\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ などは $\mathcal{M}^*$ の元の有限列である．$\mathcal{M} \models T$ の濃度が κ^* 以下ならば $\mathcal{M}^*$ の中に基本部分構造として埋め込める（問題 2.43）．この意味で，以下の議論に現れるモデルは初めから $\mathcal{M}^*$ の基本部分構造と仮定しておく．この節ではつぎの定理（ボールドウィン・ラクランによる $\aleph_1$ 範疇性の特徴づけ）を証明する．必要な定義は後で述べる．

定理 5.8　つぎの 2 条件は同値である．

1. T は $\aleph_1$ 範疇的である．
2. T は $\aleph_0$ 安定でヴォート対をもたない．

5.2.1 $\aleph_0$ 安定性

定義 5.9　つぎの条件を満たす T は $\aleph_0$ 安定 ($\aleph_0$-stable) といわれる．

(*) 任意の可算集合 $A \subset \mathcal{M}^*$ に対して，A 上のタイプの全体 $\mathrm{S}(A)$ は可算集合である（ただし変数だけが異なる二つのタイプ $p(\bar{x})$ と $p(\bar{y})$ は同じタイプと考えている）．

定義 5.10　代数的でない 1 変数論理式 $\mathcal{L}(\mathcal{M}^*)$ 論理式 $\varphi(x, \bar{a})$ はつぎの条件を満たすとき，強極小 (strongly minimal) といわれる．

(*) 任意の $\mathcal{L}(\mathcal{M}^*)$ 論理式 $\psi(x,\bar{b})$ に対して，$(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \psi(x,\bar{b}))^{\mathcal{M}^*}$ と $(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \neg\psi(x,\bar{b}))^{\mathcal{M}^*}$ のいずれか一方のみが無限である．

強極小論理式によって定義される集合 $\varphi(x,\bar{a})^{\mathcal{M}^*}$ を強極小集合と呼ぶ．

例 5.11 ACF_p を標数 p の代数閉体の公理とする．ACF_p では，量化記号の消去ができるので，1 変数 $\mathcal{L}(\mathcal{M}^*)$ 論理式 $\varphi(x)$ は $\mathcal{M}^*$ 係数の 1 変数代数方程式 $f(x)=0$ たちのブール結合で書ける．1 変数代数方程式は解が有限個しかないので，$\varphi(x)^{\mathcal{M}^*}$ は有限または補有限である．したがって，論理式 $x=x$ は強極小である．

補題 5.12 T を $\aleph_0$ 安定とする．このときつぎが成り立つ．

1. 強極小集合 $D \subset \mathcal{M}^*$ が存在する．
2. 解をもつ $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\varphi(x)$ は A 上の完全な論理式に拡大される．すなわちつぎの 2 条件を満足する $\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\psi(x)$ が存在する．(1)$\mathcal{M}^* \models \forall x[\psi(x) \to \varphi(x)]$, (2) $\psi(x)$ は A 上のタイプを生成する．

証明 1．強極小な論理式が存在しないとする．代数的でない $\varphi(x)$ を任意にとる．これが強極小でないから $\varphi(x)$ はある $\psi(x)$ によって $\varphi_0(x)=\varphi(x)\wedge\psi(x)$ と $\varphi_1(x)=\varphi(x)\wedge\neg\psi(x)$ がともに代数的でないように分割できる．この事実をくり返し使えば，0 または 1 よりなる有限列 η に対して，代数的でない $\varphi_\eta(x,\bar{a}_\eta)$ を選んで，

(a) η が ν を延ばした列ならば，$\mathcal{M}^* \models \forall x[\varphi_\eta(x,\bar{a}_\eta) \to \varphi_\nu(x,\bar{a}_\nu)]$,
(b) 各 η に対して，$\mathcal{M}^* \models \neg\exists x[\varphi_{\eta,0}(x,\bar{a}_{\eta,0}) \wedge \varphi_{\eta,1}(x,\bar{a}_{\eta,1})]$

とできる．このとき，$0,1$ の無限列 η に対して，

$$\Sigma_\eta(x) = \{\varphi_{\eta|n}(x,\bar{a}_{\eta|n}) : n \in \omega\}$$

とする．ただし $\eta|n$ は η を最初の n 個に制限した有限列である．条件 (a) により，$\Sigma_\eta(x)$ は有限充足的，また条件 (b) により，無限列 η, ν が異なれば $\Sigma_\eta(x)$ と $\Sigma_\nu(x)$ は互いに矛盾する（共通解がない）．A を $\bar{a}_\eta$ たち全体の集合

とする．0, 1 の有限列全体は可算なので，A も可算集合である．一方，$\Sigma_\nu(x)$ たちは無限列 ν の種類だけ（実数濃度）ある．このことは A 上のタイプ $\mathrm{S}(A)$ が非可算個あることを意味する．よって T は $\aleph_0$ 安定ではない．

2. $\varphi(x)$ が完全でなければ，$\mathcal{L}(A)$ 論理式 $\psi(x)$ によって二つの論理式 $\varphi(x) \wedge \psi(x)$, $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ がともに解をもつようにできる．それぞれが再び完全でなければ，さらにそれぞれが二つの論理式にわかれる．この事実を用い，1 の場合と同様に論理式の集合 $\{\varphi_\eta(x, \bar{a}_\eta)\}_\eta$ を選ぶことができ，T が $\aleph_0$ 安定にならないことがわかる． ■

補題 5.13 T を $\aleph_0$ 安定とする．このときつぎが成り立つ．

1. 濃度 $\aleph_1$ の飽和モデルが存在する．
2. 濃度 $\aleph_0$ の飽和モデルが存在する．

証明 1. $\mathcal{M}_0 \models T$ を可算モデルとする．$\mathrm{S}(\mathcal{M}_0)$ は可算なので，各 $p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(\mathcal{M}_0)$ の解を一つ以上もつ可算モデル $\mathcal{M}_1 \succ \mathcal{M}_0$ が存在する（問題 2.33 参照）．以下同様に可算モデルの基本鎖 $\mathcal{M}_i$ $(i < \aleph_1)$ を，$\mathrm{S}(\mathcal{M}_i)$ に属するタイプが $\mathcal{M}_{i+1}$ の中に必ず解をもつようにする．また極限順序数 δ に対しては単に $\mathcal{M}_\delta = \bigcup_{i<\delta} \mathcal{M}_i$ とする．このとき，$\mathcal{M}^* = \bigcup_{i<\aleph_1} \mathcal{M}_i$ は基本鎖定理により，濃度が $\aleph_1$ の T のモデルとなる．また可算集合 $A \subset \mathcal{M}^*$ が与えられたとき，A を含むモデル $\mathcal{M}_i$ が存在する．$p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ が与えられたとする．$p(\bar{x})$ は $\mathrm{S}(\mathcal{M}_i)$ に属するタイプに拡大でき，これは $\mathcal{M}_{i+1} \prec \mathcal{M}^*$ に解をもつ．よって，$p(\bar{x})$ も $\mathcal{M}^*$ に解をもつ．すなわち $\mathcal{M}^*$ は飽和モデルである．

2. 上の証明で可算モデルの基本鎖の長さを ω とすればよい． ■

定義 5.14 $A \subset \mathcal{M}^*$ とする．つぎの条件を満足する $\mathcal{N} \supset A$ は A 上の素モデル (prime model) と呼ばれる．

(*) 任意のモデル $\mathcal{M} \supset A$ に対して，$(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ 基本写像となる $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, $\sigma | A = \mathrm{id}_A$ が存在する．

補題 5.15 T を $\aleph_0$ 安定とすれば，任意の集合 A 上に素モデルが存在する．

証明　A を含むモデル $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ をとる．$\mathcal{M}$ の元よりなる列 $\{a_i\}_{i<\alpha}$ を，各 $i < \alpha$ に対して

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_i/A \cup \{a_j\}_{j<i})$$

が孤立的タイプになるように選ぶ．さらに列 $\{a_i\}_{i<\alpha}$ は極大になるように選んでおく．このとき，$\mathcal{N} = A \cup \{a_i\}_{i<\alpha}$ は $\mathcal{M}$ の基本部分モデルになる．もし，モデルにならなければ，タルスキ・ヴォートの判定条件により，$\mathcal{M}$ に解をもつ $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 論理式 $\varphi(x)$ で，$\mathcal{N}$ の中には解のないものが存在する．このとき，$\varphi(x)$ は $\mathcal{N}$ 上の完全な論理式に拡大される（補題 5.12）．その解を a_α とすれば $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_\alpha/\mathcal{N})$ は孤立的なタイプである．$\{a_i\}_{i\leq\alpha}$ は $\{a_i\}_{i<\alpha}$ の極大性に反する列である．

つぎに $\mathcal{N}$ が A 上の素モデルになることを示す．$A \subset \mathcal{M}' \prec \mathcal{M}^*$ なる $\mathcal{M}'$ を任意にとる．孤立的タイプはどんなモデルの中にも解をもつ．よって $\{a_i\}_{i<\alpha}$ は順番に（下から）$\mathcal{M}'$ の中に埋め込んでゆける．すなわち，A の各元を固定する $(\mathcal{N}, \mathcal{M}')$ 基本写像 $\sigma : \mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ が存在する．■

注意 5.16　上の証明で構成された A 上の素モデル $\mathcal{N} = \{a_i : i < \alpha\}$ では，各 $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_i/A \cup \{a_j\}_{j<i})$ が孤立的タイプになっている．このような $\{a_i : i < \alpha\}$ を $\mathcal{N}$ の A 上の構成列と呼び，$\mathcal{N}$ は A 上構成可能という．A 上構成可能なモデルは（上の証明から）A 上の素モデルとなることがわかる．$\mathcal{N}$ が A 上構成可能のとき，任意の $\bar{a} \in \mathcal{N}$ に対して，タイプ $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ は孤立タイプとなる．このことは超限帰納法により簡単に示すことができる（問題 5.17 参照）．

問題 5.17　$\mathrm{tp}(a/A)$，$\mathrm{tp}(b/A \cup \{a\})$ がともに孤立的ならば，$\mathrm{tp}(a, b/A)$ も孤立的になる．

5.2.2　強極小集合と次元

補題 5.18　D を $\varphi(x, \bar{a})$ によって定義された強極小集合とする．$A \subset D$ に対する閉包 cl を

$$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{a}\}) \cap D$$

で定義すると以下が成立する．

1. $A \subset \mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$, $A \subset B \subset D \Longrightarrow \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{cl}(B)$.
2. $b, b' \in D - \mathrm{cl}(A) \Longrightarrow \mathrm{tp}(b/A, \bar{a}) = \mathrm{tp}(b'/A, \bar{a})$.
3. $b, b' \in D - \mathrm{cl}(A)$, $d \in D - \mathrm{cl}(A \cup \{b, b'\}) \Longrightarrow \mathrm{tp}(b, d/A, \bar{a})$
   $= \mathrm{tp}(b', d/A, \bar{a})$.
4. $b \in \mathrm{cl}(A, d) - \mathrm{cl}(A) \Longrightarrow d \in \mathrm{cl}(A, b) - \mathrm{cl}(A)$.

証明　1は明らかである．2：$b, b' \in D - \mathrm{cl}(A)$ が異なるタイプをもつとする．b, b' はある $\mathcal{L}(A, \bar{a})$ 論理式 $\theta(x)$ によって，区別される．しかし，$\varphi(x, \bar{a}) \wedge \theta(x)$ あるいは $\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\theta(x)$ のいずれかは有限個の解しかもたない．よって b あるいは b' のどちらかは $A \cup \{\bar{a}\}$ 上代数的になってしまう．3：左辺を仮定する．2 より，$\mathrm{tp}(b/A, \bar{a}) = \mathrm{tp}(b'/A, \bar{a})$．したがって，$d' \in D$ を $\mathrm{tp}(b, d/A, \bar{a}) = \mathrm{tp}(b', d'/A, \bar{a})$ となるように選べる．$d, d' \notin \mathrm{cl}(A, \bar{a}, b')$ だから，再び 2 より $\mathrm{tp}(b', d'/A, \bar{a}) = \mathrm{tp}(b', d/A, \bar{a})$．よって $\mathrm{tp}(b, d/A, \bar{a}) = \mathrm{tp}(b', d/A, \bar{a})$.

4：左辺を仮定する．十分大きい個数の $b_i \in D - \mathrm{cl}(A)$ $(i < \kappa)$ をとる．2 より，これらはすべて $A, \bar{a}$ 上で b と同じタイプをもつので，$b_0 = b$ としてよい．$d' \in D - \mathrm{cl}(A \cup \{b_i\}_{i<\kappa})$ をとる．いま $d \notin \mathrm{cl}(A, b_0)$ とすれば，d' と d はともに $A, \bar{a}, b_0$ 上同じタイプをもつので，$b_0 \in \mathrm{cl}(A, d')$．3 により，$b_i \in \mathrm{cl}(A, d')$ が各 $i < \kappa$ に対しても成立する．しかし，$\mathrm{cl}(A, d')$ の大きさは $\mathrm{card}(A, \bar{a}, d') + \aleph_0$ で押さえられるので矛盾である．■

上の補題 5.18 により，強極小集合 $D = \varphi(x, \bar{a})^{\mathcal{M}^*}$ の部分集合に対して cl を使って次元を定義できる．

定義 5.19

1. $I \subset D$ は，各 $a \in I$ に対して $a \notin \mathrm{cl}(I - \{a\})$ が成立するとき，独立な集合という．
2. $A \subset D$ とする．極大な独立集合 $I \subset A$ を A の基底と呼ぶ．A に対して，その基底 I の濃度はすべて同一である（線形代数における次元の一意性とまったく同じ証明）．これを A の次元と呼び $\dim A$ と書く．

補題 5.20　I, $J \subset D$ を濃度が同じ二つの独立集合とすれば，$\mathrm{tp}(I/\bar{a}) = \mathrm{tp}(J/\bar{a})$ である．

証明　I, J が有限の場合に示せば十分．また有限の場合は，補題 5.18 の 2 をくり返し用いて，帰納法により簡単に示すことができる．■

5.2.3　ヴォート対

定義 5.21　T のモデルの対 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ がヴォート対であるとは，つぎの 2 条件を満たすことである．

1. $\mathcal{M} \precneqq \mathcal{N}$.
2. 代数的でない $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式 $\varphi(x)$ で $\varphi(x)^{\mathcal{M}} = \varphi(x)^{\mathcal{N}}$ となるものがある．

補題 5.22　T がヴォート対をもたないとする．各論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ に対して，($\bar{a}$ によらず) つぎの 2 条件が同値となる $n_\varphi \in \omega$ が存在する．

1. $\varphi(x, \bar{a})$ は n_φ 個以上の解をもつ．
2. $\varphi(x, \bar{a})$ は無限個の解をもつ．

証明　補題が成り立たないと仮定する．表現を簡単にするために，$\bar{y}$ の長さは 1 としておく．このとき各 $n \in \omega$ に対して a_n を $\varphi(x, a_n)$ が n 個以上の解をもつが，無限個の解はもたないように選べる．$a_n \in \mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$ ならば，$\varphi(x, a_n)$ のすべての解は $\mathcal{M}$ の中にあることに注意する（命題 2.58）．新しい 1 変数関係記号 U, V, 定数記号 c を用意して，つぎを表現する閉論理式の集合 $\Gamma(U, V, c)$ を考える．

1. $U \prec V$ [1]，$U \neq V$，$U \models T$，$U(c)$.
2. $\varphi(x, c)$ は無限個の解をもつ[2]．
3. $\forall x[\varphi(x, c) \to U(x)]$.

$\Gamma(U, V, c)$ の各有限部分は対 $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*, a_n)$ たちを考えることによりモデルをもつことがわかる．コンパクト性から，$\Gamma(U, V, c)$ 全体を満たす $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, a)$

1)　論理式 φ の量化記号 $\forall x$, $\exists x$ を $\forall x \in U$, $\exists x \in U$ の形で置き換えてできる論理式を φ^U と書くとき，$\forall \bar{x} \in U[\varphi^U(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi^V(\bar{x})]$ の形の論理式全体の集合として表現できる．

2)　$\varphi(x, c)$ が n 個以上の解をもつことを表す閉論理式 $\theta_n(c)$ がある．よって $\{\theta_n(c) : n \in \omega\}$ によって表現される．

が存在する．このとき $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ はヴォート対となり，補題の仮定に矛盾する．
■

定理 5.8 の証明をいくつかの命題に分けて行う．

命題 5.23 T が $\aleph_1$ 範疇的ならば，T は $\aleph_0$ 安定である．

証明 T^s を T のスコーレム化として，$\mathcal{M}^s$ を T^s の $\aleph_1$ 飽和なモデルとする．補題 2.53 により，$\mathcal{M}^s$ に一様列 $I = \{a_i\}_{i<\aleph_1}$ が存在する．$\mathcal{M} = \mathrm{Skolem}(I)$ とする．ただし $\mathrm{Skolem}(I)$ は I のスコーレム閉包である．$\mathcal{M}$ の濃度は $\aleph_1$ で，言語を $\mathcal{L}$ に制限すれば T のモデルとなる．

主張 A $A \subset \mathcal{M}$ を可算集合とすれば，T^s において，$S(\mathcal{M}, A) = \{\mathrm{tp}(\bar{b}/A) : \bar{b} \in \mathcal{M}\}$ は可算集合である．

その他の場合もまったく同様なので，$\bar{b}$ の長さが 1 の場合を考える．$A \subset \mathrm{Skolem}(\{a_i : i < \alpha\})$ となる可算順序数 α を選ぶ．$\mathcal{M}$ の元 b は適当なスコーレム関数 F を用いて，$b = F(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ と書ける．F の選び方は可算個しかない．また I は一様集合なので，T^s において，$\mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/\{a_i : i < \alpha\})$ の可能性も可算個しかない．よって b の A 上のタイプの可能性は F の可能性と $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ の可能性の積だから可算個しかない．(主張 A の証明終わり)

T が $\aleph_0$ 安定でないとして矛盾を導く．

主張 B 濃度 $\aleph_1$ のモデル $\mathcal{N}$ とその可算部分集合 $A \subset \mathcal{N}$ で，$S(\mathcal{N}, A)$ が非可算集合となるものがある．

T が $\aleph_0$ 安定でないから，ある可算集合 A 上のタイプが非可算個ある．その中から $p_i(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ $(i < \aleph_1)$ を選ぶ．各 p_i に対してその解 $\bar{d}_i$ を選ぶ．レーヴェンハイム・スコーレム・タルスキの定理を使って，濃度が $\aleph_1$ のモデル $\mathcal{N} \supset A \cup \{\bar{d}_i\}_{i<\aleph_1}$ をとればよい．(主張 B の証明終わり)

以上二つの主張 A, B により，T は濃度 $\aleph_1$ の同型でない二つのモデル $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をもつ．よって T は $\aleph_1$ 範疇的でない． ■

補題 5.24 T が $\aleph_1$ 範疇的とする．このときつぎが成り立つ．

1. 濃度 $\aleph_1$ のモデルはすべて飽和である．
2. $T^* \supset T$ を可算個の新しい定数 $\{c_i\}_{i\in\omega}$ による完全な拡大とする．このとき T^* も $\aleph_1$ 範疇的である．

証明　1. T は $\aleph_0$ 安定なので，濃度が $\aleph_1$ の飽和モデルが存在する（補題 5.13）．したがって，T の $\aleph_1$ 範疇性により，T の濃度 $\aleph_1$ のモデルはすべて飽和である．

2. $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T^*$ を濃度が $\aleph_1$ の二つのモデルとする．1 により $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ は $\aleph_1$ 飽和である．よって $\mathcal{L}$ 同型写像 $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ で $\sigma(c_i^{\mathcal{M}}) = c_i^{\mathcal{N}}$ $(i \in \omega)$ となるものが存在する[3)]．これは $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ が $\mathcal{L} \cup \{c_i\}_{i\in\omega}$ 構造としても同型になっていることを示す．■

命題 5.25　T が $\aleph_1$ 範疇的ならば，T はヴォート対をもたない．

証明　T を $\aleph_1$ 範疇的とする．T がヴォート対をもったとする．すなわち，$\mathcal{M} \models T$ とその真の拡大 $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ および代数的でない $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ 論理式 $\varphi(x, \bar{a})$ が存在して，つぎが成立する．

$$\varphi^{\mathcal{N}} = \varphi^{\mathcal{M}}.$$

$T^* = \mathrm{Th}_{\mathcal{L}(\bar{a})}(\mathcal{M})$ とおく．新しい 1 変数関係記号 U, V, 1 変数関数記号 σ を用意して $\Sigma(U, V, \sigma)$ をつぎを表現する論理式の集合とする．

1. $U \subsetneqq V$,　$U, V \models T^*$.
2. $\varphi^U = \varphi^V$.
3. $\sigma : U \to V$ は $\bar{a}$ 上の同型写像.

最初に $\Sigma(U, V, \sigma)$ が充足的なことを示す．条件 1 と 2 は U, V として $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をとれば満足される．したがって濃度 $\aleph_1$ の U, V で条件 1, 2 を満足するものも存在する．補題 5.24 により T^* も $\aleph_1$ 範疇的となるので，条件 3 を満足する σ が存在する．よって $\Sigma(U, V, \sigma)$ を満たす可算の $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, σ も存在

3)　定理 2.42 の証明参照．写像 $\sigma_0 : c_i^{\mathcal{M}} \mapsto c_i^{\mathcal{N}}$ $(i \in \omega)$ からはじめて $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間で往復論法を行えばよい．

する．さらにTが$\aleph_0$安定なので，飽和な可算モデルが存在する．よって対$(\mathcal{M},\mathcal{N})$において，それぞれは可算の飽和モデルとしてよい．これらを使って，以下の3条件を満足する可算モデルの拡大列$\{\mathcal{M}_i\}_{i<\aleph_1}$を帰納的につくることができる[4)]．

- $\mathcal{M}_0 \precneqq \mathcal{M}_1 \precneqq \cdots \precneqq \mathcal{M}_i \precneqq \cdots$.
- $\varphi^{\mathcal{M}_i} = \varphi^{\mathcal{M}_0} \quad (i < \aleph_1)$.
- $\mathcal{M}_0 \cong \mathcal{M}_i \quad (i < \aleph_1)$.

$\mathcal{M}^* = \bigcup_{i<\aleph_1} \mathcal{M}_i$は$T$のモデルで濃度は$\aleph_1$である．また$\varphi^{\mathcal{M}^*} = \varphi^{\mathcal{M}_0}$は可算集合となる．よって$\mathcal{M}^*$は飽和でない．このことは$T$が$\aleph_1$範疇的でないことを示す（補題5.24）． ■

5.2.4 $\aleph_1$範疇性の特徴づけ

命題 5.26 Tが$\aleph_0$安定で，ヴォート対をもたないとする．このとき，Tは$\aleph_1$範疇的である．

証明 $\mathcal{M}_0 \models T$を$\emptyset$上の素モデルとする（補題5.15）．$\aleph_0$安定性から強極小な論理式は存在するが，そのパラメータは$\mathcal{M}_0$の中にあるとは限らない．しかし，強極小集合の存在証明（補題5.12）を$\mathcal{M}_0$の中で行うことにより，つぎの二つの性質をもつ$\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$論理式$\varphi(x,\bar{a})$はみつけることができる．

1. $\varphi^{\mathcal{M}_0}$は無限である．
2. $(\varphi \wedge \theta)^{\mathcal{M}_0}$と$(\varphi \wedge \neg\theta)^{\mathcal{M}_0}$の両方を無限にする$\mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$論理式$\theta(x)$は存在しない．

主張 A $\varphi(x,\bar{a})$は実は強極小である．

$\varphi(x,\bar{a})$が強極小でないとする．このとき，$\theta(x,\bar{b})$なる$\mathcal{L}(\mathcal{M}^*)$論理式で$(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \theta(x,\bar{b}))$と$(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \neg\theta(x,\bar{b}))$の両方が無限個の解をもつように

4) 可算の飽和モデルからなる基本鎖（長さ可算）の極限は再び可算の飽和モデルになる．また可算の飽和モデルはすべて同型である．このことから3条件を満足する基本鎖の存在がわかる．

できる．$\bar{b}$ は $\mathcal{M}^*$ に属する！　$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}^*$ なので，各 $n \in \omega$ に対して，$\mathcal{M}_0$ の元 $\bar{b}_n$ をみつけて，$(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \theta(x,\bar{b}_n))$ と $(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \neg\theta(x,\bar{b}_n))$ の両方が n 個以上の解をもつようにできる．補題 5.22 により，十分大きな n に対しては，$(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \theta(x,\bar{b}_n))$ と $(\varphi(x,\bar{a}) \wedge \neg\theta(x,\bar{b}_n))$ の両方が無限個の解をもつ．これは $\varphi(x,\bar{a})$ の選び方に反する．(主張 A の証明終わり)

上の強極小論理式 $\varphi(x,\bar{a})$ のパラメータ $\bar{a}$ は，素モデル $\mathcal{M}_0$ の中にとれた．したがって，$\mathrm{tp}(\bar{a})$ は孤立タイプだと仮定できる．よって，$\bar{a}$ のコピー（$\bar{a}$ と同じタイプをもつ元）はどんなモデルの中にも存在する．

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ を濃度が $\aleph_1$ の二つのモデルとする．$\bar{a}_1 \in \mathcal{M}_1$ と $\bar{a}_2 \in \mathcal{M}_2$ を $\bar{a}$ のコピーとする．このとき，$\varphi(x,\bar{a}_1), \varphi(x,\bar{a}_2)$ はそれぞれ強極小論理式となる．$i = 1, 2$ に対して，$B_i = \varphi(x,\bar{a}_i)^{\mathcal{M}_i}$ とおき，$\mathcal{N}_i \prec \mathcal{M}_i$ を $B_i, \bar{a}_i$ 上の素モデルとする．もし $\mathcal{N}_i \neq \mathcal{M}_i$ とすれば，T がヴォート対をもたないことから，$\varphi(x,\bar{a})^{\mathcal{M}_i} \supsetneq \varphi(x,\bar{a})^{\mathcal{N}_i} \supset B_i$ となって矛盾にいたる．したがって $\mathcal{N}_i = \mathcal{M}_i$ である．すなわち $\mathcal{M}_i$ 自身が $B_i, \bar{a}_i$ 上の素モデルとなる．これより，$\mathrm{card}\ B_i = \aleph_1$ もわかる．

$I_i \subset B_i$ を B_i の基底とすると，$\mathrm{card}\ I_1 = \mathrm{card}\ I_2 = \aleph_1$ である．したがって補題 5.20 により，$\mathrm{tp}(I_1, \bar{a}_1) = \mathrm{tp}(I_2, \bar{a}_2)$ である．

主張 B　$\mathrm{tp}(B_1, \bar{a}_1) = \mathrm{tp}(B_2, \bar{a}_2)$.

$a \in B_1$ を任意の元とすれば，基底の定義により，$a \in \mathrm{acl}(I_1, \bar{a}_1)$ である．したがって，$\mathrm{tp}(a/I_1, \bar{a}_1)$ は孤立的で，それを生成する論理式 $\psi(x)$ が存在する．$\psi(x)$ のパラメータを対応する $I_2, \bar{a}_2$ の元で置き換えてできる論理式を $\psi^*(x)$ とする．$\mathrm{tp}(I_1, \bar{a}_1) = \mathrm{tp}(I_2, \bar{a}_2)$ だから，$\psi^*(x)$ は $I_2, \bar{a}_2$ 上のタイプを生成する．その解の一つを $b \in B_2$ とすれば，

$$\mathrm{tp}(I_1, \bar{a}_1, a) = \mathrm{tp}(I_2, \bar{a}_2, b)$$

が成立する．この議論のくり返しで，$\mathrm{tp}(B_1, \bar{a}_1) = \mathrm{tp}(B_2, \bar{a}_2)$ を得る．(主張 B の証明終わり)

つぎの主張を示せば命題 5.26 の証明が完了する．

主張 C　$\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$.

主張 B により，$\mathrm{tp}(B_1, \bar{a}_1) = \mathrm{tp}(B_2, \bar{a}_2)$．したがって，$B_1, \bar{a}_1$ を $B_2, \bar{a}_2$ に移す基本写像 σ が存在する．$\mathcal{M}_1$ は $B_1, \bar{a}_1$ 上の素モデルであった．したがって，$\sigma(\mathcal{M}_1)$ は $B_2, \bar{a}_2$ 上の素モデルになる（σ の定義域に $\mathcal{M}_1$ が入るように拡大しておく）．したがってさらに $B_2, \bar{a}_2$ を固定する基本写像 τ をとれば $\tau(\sigma(\mathcal{M}_1)) \prec \mathcal{M}_2$ とできる．この二つのモデル間で，$\varphi(x, \bar{a}_2)$ の解は等しいので，ヴォート対をもたないことにより，$\tau(\sigma(\mathcal{M}_1)) = \mathcal{M}_2$ を得る．このことは，$\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ が同型になることを示す.（主張 C の証明終わり）

以上から T は $\aleph_1$ 範疇的である． ■

定理 5.27（定理 5.8 の再掲）　つぎの 2 条件は同値である．

1. T は $\aleph_1$ 範疇的である．
2. T は $\aleph_0$ 安定でヴォート対をもたない．

証明　1 ⇒ 2 は命題 5.23 および命題 5.25 である．2 ⇒ 1 は命題 5.26 である． ■

以上の証明に必要な変形を行えば，κ を任意の非可算基数とするとき，T が κ 範疇的であることも同値な命題になることがわかる．この結果はモーレイの範疇性定理と呼ばれている．

参考文献

本書で必要とする素朴集合論の知識は [Halmos 1974] にあるもので十分である．素朴集合論という題名であるが，公理論的集合論に近い取り扱いをしている．[Shoenfield 1967] は定評のある数理論理学の入門書である．最近では [Enderton 2001] が人気があるようだ．モデル理論全般についての解説書としては，[Chang and Keisler 1990] あるいは [Hodges 1993] がある．両方ともかなりの厚さなので，最初から全部を読むのは難しいかもしれない．本書では ω 安定性だけについて述べたが，一般の安定性に関しては，[Baldwin 1988]，[Lascar 1987]，[Pillay 1983] がよい入門書となる．群論への応用としては，[Poizat 2001] がコンパクトに整理されている．[van den Dries 1998] は，実閉体の量化記号消去に端を発し，その後さかんに研究されている順序極小理論 (o-minimal theory) を扱っている．[Bouscaren 1998] は Hrushovski の結果（代数幾何への応用）の解説である．

【素朴集合論】

[Halmos 1974] Halmos, P. R., *Navie Set Theory* (Undergraduate texts in mathematics), Springer-Verlag (1974).

[赤 1959] 赤攝也『集合論入門』（増補版），新数学シリーズ 1，培風館 (1959).

【数理論理学】

[Enderton 2001] Enderton, H. B., *A Mathematical Intoroduction to Logic*, 2nd ed., Harcourt/ Academic Press (2001).

[Shoenfield 1967] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (1967).

【モデル理論全般】

[Chang and Keisler 1990] Chang, C. C. and Keisler, H. J., *Model Theory*, 3rd ed. (Studies in logic and the foundations of mathematics 73) North-Holland (1990).

[Hodges 1993] Hodges, W., *Model Theory*, Cambridge Univ. Press (1993).

【安定性】

[Baldwin 1988] Baldwin, J. T., *Foundmentals of Stability Theory*, Springer-Verlag (1988).

[Lascar 1987] Lascar, D., *Stability in Model Theory*, translated from the French by Wallington, J. E., Longman Scientific & Technical (1987).

[Pillay 1983] Pillay, A., *An Introduction to Stability Theory*, Clarendon Press (1983).

[Shelah 1990] Shelah, S., *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, Rev. ed., North-Holland (1990).

[坪井 1997] 坪井明人『モデルの理論』（数学基礎論シリーズ 3）河合文化教育研究所／河合出版（発売）(1997).

【モデル理論の応用】

[Bouscaren 1998] Bouscaren, E. (ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry: an introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture*, Springer (1998).

[Poizat 2001] Poizat, B., *Stable Groups*, translated from the French by Klein, M. G., Ameican Mathematical Society (Mathematical surveys and monographs vol. 87) (2001).

[van den Dries 1998] van den Dries, L., *Tame Topology and o-minimal Structures*, Cambridge Univ. Press (1998).

III

論理的意味論の源流，モデル論の誕生，そしてその展開

論理と言語の間で

野本和幸



現代の論理学には二つの対立する源流があり，それらが 1920 年代末から 1930 年初頭において合流し，いわゆる現代論理学が誕生したとされる [van Heijenoort 1967; Grattan-Guinness 2000].

第一の流れは，ブールに発し，パースの関係算・量化を経て，シュレーダーによって一応の集大成がなされる「論理代数」の流れであり，第二の流れは，フレーゲによる高階量化論理の公理体系提出に発し，ラッセル・ホワイトヘッドに集大成される公理論的な「論理主義」の流れである．ブールの記号的代数は，記号と解釈とを切り離し，代数を多様な解釈を許す抽象的計算として展開した．一方，フレーゲ，ラッセルの公理的アプローチは，真なる公理群と真理保存的な推理規則に基づく，形式的ならびに意味論的導出方法が一体となったものである．だが，並行して展開されていた，カントルの素朴集合論およびフレーゲの高階論理からパラドクスが発見されて以降，ラッセルの型理論，ツェルメロらの公理的集合論，ブラウワーらの直観主義，ヒルベルトらの形式主義といった，数学基礎論が登場したことは周知のことである．ヒルベルトの形式的証明論は，ラッセル・ホワイトヘッドの公理的体系中，とくに 1 階論理を独立の体系としてとり出し，その統語論的側面を切り離して有限主義的な仕方で整備したものである．

他方，ブール，シュレーダーの伝統からは，記号や式とその解釈を切り離し，議論領域の変動と相対的に解釈を変えるモデル論的なアプローチによって，レーヴェンハイム [Löwenheim 1915]，スコーレム [Skolem 1920] により，最初の重要なモデル論的定理が確立される．スコーレムには，パラドクスを生む無限領域への量化を避ける有限主義的志向が強い．元来の「レーヴェンハイム・スコーレムの定理」は，量化子を消去し，自由変項のみが現れる 1 階の整式についての定理であるが，パース関係などを含むブール・シュレーダー的論理にとどまり，公理的体系そのもののモデル論にはなっていない．

ラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』や，ヒルベルト派の 1 階論理の公理論体系を学んだ，エルブラン [Herbrand 1929] の「基本定理」やゲーデルの「完全性定理」(1930) は，公理論的な 1 階体系における統語論的証明可能性と，モデル論的な妥当性との同値性を示すという仕方で，以上のような二つの源流を融合させてその「複合的アマルガム」をつく

り出し，いわゆる「現代論理学」を確立したのである．

以下では，まず現代論理学の先述の二つの源流，ブールに始まる論理代数的アプローチと，フレーゲの高階述語論理とその意味論の独自性をややくわしく追跡し，あわせてラッセルや初期ウィトゲンシュタインの意味論的考察に簡単に触れよう．ついでレーヴェンハイムによるモデル論の誕生，スコーレム・パラドクスの衝撃，ゲーデルによる現代論理学のモデル論の成立，そしてモデル論のいわば爆発的な進展をもたらしたタルスキの仕事を概観したい．

その後はタルスキに影響を受けつつ展開された，カルナップらの内包論理の意味論，両者の影響下に展開された「論理的意味論」のいくつかのトピックスを追跡しよう（フレーゲを継承したチャーチの特異な内包論理も一瞥する）．1960 年代以降，論理学・哲学界を席巻した可能世界意味論，さらには 1970 年代にモデル論的手法の日常言語断片への応用を試みたモンタギュー文法やタルスキ真理論を逆転用したデイヴィドソンの意味理論を一瞥する．ついでカプランによる指示詞や指標詞のような文脈依存的表現の意味論の骨子をみる．あわせてとくに信念・知識といった命題的態度の意味論についても，試案を提出したい．

第1章
現代論理学の二つの源流

1.1　論理代数的アプローチ

1.1.1　ブールの論理代数

いまや論理学史上の常識となったが，現代論理学への画期は，ドイツの数学者・論理学者・哲学者フレーゲの僅々100 頁に満たない小冊子『概念記法』[Frege 1879] の出現に求められる．しかしイギリスのブールの論理代数が先行している．ブールは，推論の法則を記号の計算法則とみなした．彼の論理的操作は，ライプニッツ流には「推論計算」であり，加減乗法といった代数的演算と類比的である．ブールによれば，記号結合の妥当性は，結合法則のみに依存し，記号の解釈から独立である．ここに記号結合のみを扱う統語論と記号の意味論を切り離す，という考えの先駆がある．

ブールは『論理の数学的分析』[Boole 1847] においてこうした考想を一般化し，代数を多様な解釈を許す抽象的計算として展開した．まず演算記号として＋，·，－および等号＝が，定項記号として 1，0 が，また変項記号として x, y が導入され，形式的な記号体系が与えられる．つぎに，記号体系の意味論を考える．まず第一の解釈としてクラス計算という解釈を選べば，$x = y$ は，同一クラスを，$x \cdot y$ は共通部分を，$x + y$ は合併クラスをそれぞれ表

し，1 はあらゆる成員からなる全クラス（談話領域）を，0 は空クラスを表す．$-x$ は x の補クラスを表す．では論理式はどう表されるのか．全称肯定命題「すべての x は y である」は $x \cdot (1-y) = 0$ で，特称肯定命題「ある x は y である」は $x \cdot y \neq 0$ で表される．この解釈でも x, y はクラスを表し，よって伝統的な名辞論理学もクラス計算と解される．またブールでは，ベキ等律 $x^2 = x$, $x \cdot (x-1) = 0$ が，つまり $x = 0$ または $x = 1$ が成り立つ．このことは命題 x が真または偽の二値性をもつと解釈できる．そこで命題論理に関しては，いわば第二の解釈として，命題 x の真は等式 $x = 1$ によって，偽は $x = 0$ によって表される．そして $x \cdot y$ は連言（論理積）「x そして y」を，$x + y$ は選言（論理和）「x または y」を，$-x$ は否定「x でない」のように，命題結合子を表すと解する．しかしブールの場合，命題論理はいまだ二次的にすぎず，命題論理と述語論理とが分断され一貫した体系をなしていない．このことは，0, 1 が一方では命題の真偽を，他方のクラス計算解釈では空クラスと全談話領域を表すと解されることにも現れている．「すべて」「ある」に対する量化記号もなく，明確な量化についての考えもない．ブール代数は，やがて抽象代数の一つである論理代数として整備発展するが，元来のままでは計算としては有効でも普遍的言語としての表現能力は弱い．しかし記号解釈の可変性という考えは，後のモデル論展開へのヒントとなった．

1.1.2　パースとシュレーダー

パースはその最初の論文 [Peirce 1870] において，ブールのクラス算を関係代数にまで拡張し，またアリストテレスの三段論法に現れる普遍，存在量化をブールの命題論理と結び付けて，関係算に及ぼそうと試みている．しかし，ブールの記法を拡張して，存在量化を関係積で，普遍量化を指数で表すにとどまり，いまだ独自の量化記号はない [Brady 2000, chap.2]．パースの関係代数論が明瞭な形をとるのは [Peirce 1880] 以降であろう．フレーゲに遅れて，パースは普遍量化記号 Π，存在量化記号 Σ をはじめて導入し [Peirce 1883]，「すべてのものは誰かを愛するものである」といった多重量化を ‘$\Pi_i \Sigma_j L_{ij}$’（L_{ij} は関係述語を表す）と表記し，彼の 1 階ならびに 2 階の量化理論の本格的展開は [Peirce 1885] においてなされることになる [Brady 2000, Chap.5

and 6].

こうしたブール，パースの仕事を集大成したのは，ドイツのシュレーダーである．彼のライフ・ワーク『論理代数講義』全 3 巻 [Schröder 1890–95] は，束論およびデデキント連鎖[1]の最初の提示で，関係算の最も包括的な展開であり，また関係算による数学の基礎への対処であって，レーヴェンハイムの定理の定式化を促し，スコーレム関数という考えの先駆をなす．

第 1 巻 (1890) では，半順序集合，束，およびブール代数の十全な公理的扱いが導入されている．第 2 巻 (1891) では命題論理とその真理関数が，束論的に可能な限りで扱われている．のみならず，Π, Σ の意味論が与えられ，Πx は「固定された個体領域 x すべてについて，ないし x 上の積」，Σx は「固定された個体領域の少なくとも一つについて，ないし x 上の和」を表す．つまり当の個体領域の上を走る積変数，和変数としての変数 x, y の真理関数を用いて，当の言語中の量化子とは，ある固定した個体領域の上の真理関数へのこうした演算に対応すると解釈するのである．ただし，いまだ式という一般的観念は登場していない．第 3 巻 (1895) では，関係がある固定した個体領域上での二項関係として導入され，順序対が議論される．第 IX–X 講ではデデキントの連鎖理論が，まったく関係に関する言語だけで展開される．また XI–XII 講では，個体領域ないしその対上の非可算な積や和に関する代数の研究が始められ，多重量化，さらには関数への高階論理が扱われて，その間にスコーレム関数への先駆が登場している [Brady 2000, Chap.7].

1.2 フレーゲの論理的意味論

現代論理の創始者であるにもかかわらず，フレーゲの論理思想はあまり知られていないので，ややくわしく言及しよう．フレーゲ生涯のプロジェクト

1) 集合 S の部分集合 S' が後者関係のような再帰関数 φ によって S の中に写像される場合 ($\varphi(S) = S' \subset S$)，$S$ を「連鎖」という [Dedekind 1887, §4]．しかし，デデキントに先行して，フレーゲが『概念記法』[Frege 1879] 第 III 部で，「遺伝性」と「祖先関係」を用いて，「連鎖」と同等の「系列」を，より論理的に定義していたことを，デデキントは上記第 2 版の序文で明記している (1893).

は，いわゆる「論理主義」であった．その哲学的動機は，算術が分析的か否かという認識論的なものである．つまり，算術を，いかなる「直観」にもよらずに論理学のみに遡及しうるか，また数を論理的に定義可能かという問題であった．この論理主義の検証に際し，フレーゲは「反心理主義」を採り，いわゆる「文脈原理」:「語の意味は文という脈絡で問え」[GLA][2]を提唱し，先の認識論的・存在論的課題を言語哲学的・意味論的戦略へと転轍(てんてつ)したのである．「論理主義」検証の核心は，算術的概念の論理的定義と，算術的命題の基本的論理法則からの導出可能性にある．だが 19 世紀後半には，算術が遡及されるべき論理学は存在しなかった．よってフレーゲは，全算術をその上に基礎付けるに足る強力な論理学そのものを独力で構築しなければならなかった．かくしてまずフレーゲの探究は，論理学の革命的変革にむかう．

1.2.1　フレーゲの論理革命と論理・算術の公理体系化

(1)『概念記法 (BS.)』[Frege 1879]

論理主義の検証には，算術的諸概念の定義，高階の多重量化を含む全算術的命題の，基本的論理法則からの隙間なき推論による証明・正当化が不可欠である．そこでフレーゲは，少数の原初的記号のみで命題の論理的構造を明晰に表し，推論の移行を明白に示す「補助言語」としての「記号言語」を構成する必要に迫られた．こうして定式化された「概念記法」を対象言語に用い，ブールでは分断されていた命題論理と述語論理を統一し，多重量化を含む，史上初の高階述語論理の公理体系を一挙に提出した．この『概念記法』[Frege 1879] の公刊が現代論理学の画期をなす．

(2) 判断論・推理論

フレーゲ論理学の方法の注目すべき特徴にいくらか触れておこう．第一は判断優位の主張である．ライプニッツ，ブールらの論理計算は，要素概念を既知と前提して複合にむかう要素論的なものである．しかし最も困難な仕事は，原初的概念の発見であり，その方途は「判断」から要素への「分析」にある．

2)　以下，フレーゲの著作に関しては，GLA，GGA などと略記する．くわしくは参考文献を参照．

第二に，判断分析には，伝統的な主 – 述分析を廃し，関数とアーギュメント (argument) への「関数論的分析」が採用される．分析が基本的論理概念に至れば，複合・合成のアルゴリズムも用意される．こうして論理ならびに算術の公理体系化がなされる．第三の特徴は，その判断論，推論・証明論が，認識論的観点からみられていることである．すなわち，「推論・証明」とは，結論をなす判断の，前提・基礎的真理への遡及による「正当化」とみなすのである．前提・結論は，いずれも主張・判断の表明で ‘⊢ A’ と表記される．

認識論的な正当化過程は, (仮定内容の真偽への)「問い」から出発する．理解内容は，判断線 ‘ | ’ を除去した ‘—A’ で表され，真偽いずれかを意味する「真理値名」と称される（推論における主張・判断の再認識が始まったのは，比較的最近のことである [Martin-Löf 1985]）．第二のステップは，ある思想内容を「真とみなすこと」，つまり，仮定の定立である．第三は，その検証，「吟味，正当化」で，仮定・想定を結論とみなし，それを正当化する前提へと遡及する手続きで，それがフレーゲのいう「推論」である．遡及されるべき前提・基礎的真理が，特殊事実的でなく論理法則のみであれば，結論は分析的である．第四に，正当化を経て仮定が基礎的真理へ遡及されると，仮定は，判断（思想の真理性の承認）となる．正当化された真なる判断が「認識」である（詳細は [野本 1986; 2005; 2006]）．

(3) 論理の基本法則と原初的論理語

だが原初的論理語は論理的に単純ゆえ，定義不可能である．また論理の基本法則自体のさらなる正当化·証明は不可能である．だが矛盾の出現によって反証可能であり，不可謬ではない．実際ラッセルのパラドクスが発見された．

(4) 関数論的分析と合成

真理値名 ‘—A’ の，関数/アーギュメントという「関数論的分析」を与える．フレーゲ統語論の特色は，真理値名の要素分析に，二種の形成規則，つまり，除去による関数記号の析出と，充当による関数表現の空所への適切な名前の複合表現の形成（「合成原理」）とがあることである [GGA, §30]．水平線 ‘—’，否定 ‘⊤’，条件 ‘→’，普遍量化記号 ‘∀’，等号 ‘=’，記述記号 ‘/’，値域関数記

号 '$\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$' など 8 個の原初的な論理的関数表現から形成される，論理的基本法則（公理）と，唯一の推論規則（分離則 MP（Modus Ponens; 三段論法）＋実際には「代入原理」）とが明確に区別され，史上初の高階述語論理の公理体系が提出されている[3)][野本 1986].

1.2.2　論理的意味論の原型

(1) 普遍主義とメタ的説明

フレーゲの論理体系中，同一性を伴う 1 階述語論理断片は，後に無矛盾で，健全かつ完全であると証明された．ダメットは，フレーゲ自身がその完全性証明を企ててはいないとしても，それに必要な道具立てを手中にしていた，と主張した [Dummett 1973, pp.81–82]．だがある有力な論理学者たちは[4)]，フレーゲの論理観を「普遍主義的 (universalist)」とみなして，1920 年代以降の現代論理との断絶を強調する．彼らによれば，普遍主義では，量化子は一切の対象をその個体領域とし，関数はすべての対象に関して当てはまるか否かのいずれかである．個体領域を動かし，それと相対的に量化の範囲を変動させる現代のモデル論的発想は，普遍主義には塞がれており，体系外から，無矛盾性，完全性，公理の独立性といったメタ的な問題提起をなしえないとみなす．よってフレーゲ，ラッセルの普遍主義的論理主義には，メタ的意味論はありえないと主張される．

この論争に立ち入る暇はないが，確かにフレーゲにはモデルを変動させ，量化とその可変的領域確定を結合させる発想はない．領域が変動するにせよ，論理の普遍性は結局すべての領域に関して真を要求するし，また条件つきの普遍性は前件で領域を制限する条件文 "$\forall x[Fx \rightarrow Gx]$" で表して，量化の普遍性は保持するというのが，フレーゲの考えであった．

全算術の論理学への遡及という「論理主義」提唱の動機からして，完全性

3)　長らく不評だったフレーゲの 2 次元的表記はゲンツェンの NK，LK に，また証明図の樹枝状表記は，プログラミング言語と親近性をもつことが判明している．なお各表現のタイプを厳格に区別し，一層厳密な形式言語を形成したのは，チャーチの λ 計算単純型理論である [Church 1940; 1941]

4)　たとえば，ファン・ハイエノールト，ドリーベン，ゴールドファーブ，リケッツ，ヒンティカらがその代表格であり，ダメット，ヘック，タッペンデンらと論争中である．

の問題はフレーゲも意識していた.「ひとそろいの公理が完全であるかどうかを確かめたいと思えば，その公理から数学の関連する分野におけるあらゆる証明を引き出そうとしなければならない」[Frege 1897, 362]．だがフレーゲにとっては，全算術を遡及しうる，完全な論理学を自ら構築することによって，その可能性を「確かめる」地点に到達することが先決であった．その意味では，フレーゲにとっての完全性問題は，まずは「実験的なもの」(エルブラン）で，実際に数学で使用されている推論や算術的命題をすべてすくいとるべき論理の構築にあった.

しかしフレーゲの論理観が「普遍主義的」であるがゆえに，何らのメタ的，意味論的考察はありえず，比喩などによるウィトゲンシュタイン的「解明」の余地しかないという主張は，実際のテキストからみても，不可解なものである．事実，独立性証明については，変換に対応する「置換」を用いる独自な着想が示されている [GLG, pp.425ff.; 野本 2005].

のみならずフレーゲは，「概念記法」という記号的対象言語と，その言語の原初的記号，公理，推論規則についてのメタ的「説明」や，証明構成の予備的説明・「分析」を与えるためのドイツ語（メタ言語，「説明言語」）とを，明確に区別している．さらに「比喩的な示唆による解明」も，どの局面でなされるのか確定を要する．たとえば以下を参照されたい（詳細は [野本 1986; 2005]）.

① 『概念記法』[Frege 1879] 第 I 部「表記法の説明 (*Erklärung*)」での，原初的記号導入のメタ的説明,

② 『算術の基礎』[GLA] のとくに後半は，1882 年すでに「ほとんど完成していた」，論理主義を実証する書物の，メタ的な非形式的説明である.

③ 『算術の基本法則』[GGA] 第 I 部「原初的記号の説明 (*Darlegung*)」での，原初的論理記号の有意味性証明（成功すれば，フレーゲ的無矛盾性証明に相当），公理の真理性，推論規則の真理保存性のメタ的な説明は，一種の意味論的正当化，少なくとも意味論的説明である [野本 1986, pp.60f.].

(2) フレーゲの意味 (*Bedeutung*) 論

フレーゲの論理的意味論の大前提は，文の意味 B が真または偽だという「二値原理」である．この原理に立って，各原始的表現に付値される意味に関し，きわめて簡明な意味論が与えられる．水平線には真理値真の場合に限り真理値真へ写像する関数が，否定線には真理値を逆転する関数が，条件線には前件偽か後件真の場合には条件文全体は真を写像する関数が，付値される．単称名の意味はそれが表示する各 < 対象 > であり，述語の意味は <1 階概念・関係 >（対象から真理値への関数），普遍量化記号の意味は，<2 階概念 >（1 階概念から真理値への関数）で，「すべての ϕ」は，すべての対象が概念 ϕ を満足するときそのときのみ真となる．このように，フレーゲ意味論のきわめて重要な貢献は，第一に「語の意味 B は文という脈絡の中で問え」という「文脈原理」，ないし「語の意味は文の意味 B ＝真理値への貢献である」という「文優位テーゼ」と，第二に「文および複合的表現の意味 B は構成要素表現の意味 B によって決定される」という「合成原理」とが明瞭に表明されていることである．後述のカルナップ・チャーチの「内包論理」や，近年「フレーゲ構造」として，上記のフレーゲ的意味論が，たとえば，純粋な形式言語であるチャーチの λ 計算のモデル論として展開されていることからも [Aczel 1980]，フレーゲに意味論の余地なしという主張は，不可解なものである．

(3) フレーゲの真理論

フレーゲは真理概念についてどう考えたか．彼は真理を「定義不可能」とみなした．たとえば，真理対応説は，真理を「思想と事実との対応」によって定義する．だがそれは無限後退に陥る．この定義自体の真理性が問われ，再び別の事実との対応に訴えねばならないからである．むしろ真理は根元的で単純であるがゆえに定義不可能なのである．

しかし，この議論を受容可能な真理定義の満たすべき制約の消極的要求と解することは可能である．その積極的制約提示の一面を，ダメットに倣って「同値テーゼ」と呼ぼう [Dummett 1973, Ch.13, pp.444ff.]．簡略には，満足

のゆく真理定義からは，同値式「A が真なのは，A のときそのときに限る」が導かれねばならない，ということである（詳細は [野本 1986]）.

だが，フレーゲの「同値テーゼ」は強弱二様で，また弱い説に関し複数の解釈が可能である．フレーゲは，「思想 A は真である」という文の表現する思想は，思想 A と同一であって，何も新しいものを付加しないという ([SB] 34, [G] 61). これは，真理余剰説の先駆というよりむしろ，「同値テーゼ」の非常に強いヴァージョン，思想に関する不動点定理の提示と解しうる．

(T0)　「思想 p_1 は真である」の表現する思想は，思想 p_1 と同一である．($[W(p_1)]_1 = p_1$，すなわち [Parsons 1981] に従えば，$(p_1)_1 = p_2 = p_1$ なので $W_1(p_1)_1 = W_1(p_2) = W_1(p_1) = p_1$)　[$p_1$ は，文 'p' の表現する思想を，$(p_1)_1, p_2$ は 'p_1' の思想（つまり，'p_1' の思想の思想）を表す]

この (T0) を満たす「真」という述語の「意義」について，フレーゲはある遺稿で興味深い所見を述べている．「「真」という語は，それが述語として現れる全体の文の意義にいかなる貢献もしないような意義 (Sinn) をもつ」[Frege 1915 in [NS] 271–272]. すると述語「真」の意義は，主語の思想をそれ自身に写像する，思想間の＜同一性関数＞である．

さて水平線 '$-\xi$' に関しフレーゲは，「真理値名 '$-p$' が真理値真の名前であるのは，'p' が真理値真の名前のときそのときに限る」とみなす．これは，

(T1)　$-p$ なのは p のときそのときに限る [$-p \Leftrightarrow p$] ないし，
(T1)*　$-p = p$.

これをつぎのように読むことも不可能ではない．

(T*)　p が真であるのは，p のときそのときに限る．

この (T1)(T*) は，真理値の同一性，質料的同値を要求するだけの弱い「同値テーゼ」の一つの定式化である（だが水平線 '$-$'，つまり「真である」はメタ言語にではなく，対象言語に属する．したがって，嘘つきのパラドクスが問題となりうる）．これらの場合水平線 '$-\xi$' は，＜ξ は真である＞という真

理概念を意味すると解しうる．つまり，真理値真のみから真理値真へと写像する特殊な論理的関数であるこの < 真理関数的真理概念 > は，「真」という述語の意味 B と解することができよう．さらにフレーゲは，概念の外延という論理的対象を導入し，真理値真を，真理概念 $-\xi$ の値域，$\grave{\varepsilon}\,(-\varepsilon)$ と同一視する．

ところでフレーゲは，先の弱い「同値テーゼ」の定式化 (T1) をつぎのように分節して表している．

(T2)　$\Phi(\Gamma)$ が真ならば，対象 Γ が概念 $\Phi(\xi)$ の下に帰属する [GGA, I§4].

この (T2) には複数の解釈が可能である [野本 1986; さらに野本 2005].

(i)　右辺を対象言語中の文 '$\Phi(\Gamma)$'，真理値名と解し，左辺を上記のようにやはり対象言語中の文 '$-\Phi(\Gamma)$' と解すると，(T1)(T1)*と同様の定式化となる．

(T2-1)　$-\Phi(\Gamma) \Longleftrightarrow \Phi(\Gamma)$．ないし　(T2-1)* $-\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma)$.

この場合に可能な一つの解釈は，「真である」の意味 B が真から真への < 真理関数的真理概念 > と解することである．

(ii)　だがまた文の思想が真理の担い手であると解すると，「真である」の意味 B である真理概念 $W(\xi)$ とは，右辺の表す真理条件が充足されている場合にのみ，思想から真理値真へ写像する内包的関数という < 内包的真理概念 > と解されよう．

(T2-2)　思想 $[\Phi(\Gamma)]_1$ が真なのは，$\Phi(\Gamma)$ のときそのときに限る．

(iii)　他方 (T2) をメタ言語の文と解し，一見タルスキに近い形で，左辺の $\Phi(\Gamma)$ を対象言語中のある文 $\phi(\gamma)$ の構造記述名，右辺「Γ は $\Phi(\xi)$ の下に帰属する」をその文 $\Phi(\Gamma)$ のメタ言語において見出されるべき記述・解釈と解すると，メタ述語「真である ($T(\xi)$)」は，メタ言語中の名前から記述へ写像する < メタ的真理概念 > を表すと解されよう．

(T2-3)　$\Phi(\Gamma)$ は真である $\Longleftrightarrow$ 対象 Γ は概念 $\Phi(\xi)$ の下に帰属する．

このようにフレーゲにおける「真である」の表す「意味 B」としての「真理概念」は，相互に密接に関連しあっているが一意的とはいいがたく，弱い「同値テーゼ」の制約を満たしている真理概念として，少なくとも上記の < 真理関数的真理概念 >，< 内包的真理概念 >，< メタ的真理概念 > の三つを区別することができよう．かくして先述の (T0) に定式化された「真」という語の「意義」に関する強い「同値テーゼ」の制約を満たす思想間の < 同一性関数 > とあわせて，少なくとも四つに分節可能であると考えられる．

1.2.3　フレーゲの意義論

一方フレーゲは，意味 (Bedeutung) 以外に「意義 (Sinn)」という意味論的因子を導入した．意義には (i) 真理論的な相と (ii) 認知的な相がある [野本 1986; 2005].

(i) いわゆる「真理条件的意味理論」の先駆として参照される古典的な箇所において，フレーゲは，意義を思想と重ね合わせ，後者を真偽の問われる当のものとみなし，真理条件，したがって真理論との密接な関連において意義をとらえている．「真理値名は，我々の約定によって，いかなる条件下で真を意味するのか，それが確定される．これら真理値名の意義，思想は，これらの条件が充足されているという思想である」[GGA, I§32].

上の (T2) を使って補足すれば，真理値名 ‘$\Phi(\Gamma)$’ は，その各構成要素である名前 ‘Γ’ が対象 Γ を意味し，述語 ‘$\Phi(\xi)$’ が概念 $\Phi(\xi)$ を意味するという約定に従い，右辺で述べられているような < 対象 Γ が概念 $\Phi(\xi)$ の下に帰属する > という条件下で真を意味すると確定されるのである．

フレーゲは，真理値名・文の構成要素である名前や述語は，当の文の思想を表現するのに貢献するが，そうした貢献が名前や述語の意義なのであり，また思想の部分なのだと述べている（上同，§32）．ここにわれわれは「語の意義は，文の意義・思想の脈絡において問うべし」との意義に関する「文脈原理」を窺うことができよう．

(ii) その認知的な導入理由はつぎのようである ([SB] 26).

(a)「宵の明星＝宵の明星」「9=9」の真理性は，ア・プリオリで分析的だが，

(b)「宵の明星＝明けの明星」「$9 = 2^3 + 1$」はしばしばわれわれの認識を拡張する．実際 (b) 型の等式に関する真理性の認識には，特別の認識活動，たとえば，経験的観察・実験や形式的証明，が必要である．だが (a)(b) の等式の両辺に現れている記号の意味 B ＝表示対象は同じであるから，意味 B によってはこうした認識上の価値の差異を説明できない．そこでフレーゲは語や名前には，その意味 B 以外に，その意味 B ＝表示対象がどのように与えられるかという「与えられ方」「確定法」を含む別の意味論的因子を認め，それを「意義 (Sinn)」と称したのである．かくて「$a = a$」と「$a = b$」との表す思想・意義は異なる．

そして意義に関しても「文中の語の意義は，その命題の意義・思想への貢献である」という「文脈原理」と，逆に「語の意義と文の構造 (Aufbau) が当の文の意義・思想・真理条件を決定する」という意義に関する「合成原理」を主張する．そして意味・意義に関する合成原理こそが，言語の習得可能性と，有限の語彙しかもたぬ人間がなぜ潜在無限の新しい文を理解し，生成できるのかという言語の創造性とを説明する，とフレーゲは明瞭に表明しているのである．

1.2.4 体系構築への予備学的解明 (Erläuterung)

また純粋な意味論的説明とは区別されるメタ的，ないしメタメタ的説明，フレーゲが「予備学」「準備」「解明」「示唆」「論理」「論理探究」「比喩」等々と称する「解明命題」([Frege 1899] in [WB]) による論理哲学的探究がある．

これらは基本的な論理的区別，「論理形式」，意味論的区別（「意味」と「意義」など）といったメタ的観念の比喩的示唆によるいわばメタメタ的解明に関わる．統語論的カテゴリーの区別（固有名/述語・関数名・概念語）と存在者の論理的型の区別（対象/関数・概念など）に関しては，関数表現・概念語や関数・概念は「空所をもち」「不飽和」だが，固有名や対象は「完結・飽和している」[BG] といった比喩によって解明される．また「意味－意義－表象」の関係も，望遠鏡の比喩により，意味を「観察対象」に，意義を「対物レンズ上の実像」に，表象を「各観察者の網膜像」に喩える [SB]．このように自

らの論理体系の構築・論理哲学探究の最も基本的な道具立てについての解明という局面で，そしてほぼその次元でのみ，フレーゲはヴィヴィッドな比喩に訴えて示唆的解明を行っている [野本 2005].

1.3　ラッセルとウィトゲンシュタイン

1.3.1　ラッセルの論理的意味論

パラドクスを型の区別を導入することによって回避し，フレーゲの「論理主義」を一層展開したのが，ラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』(1910–1913) [Russell and Whitehead 1910] であった．ただしラッセルは集合論上のパラドクスのみならず，嘘つきのパラドクスにも同時に対処しようとし，複雑な分岐型理論を採用しているが，ラムジーによって二つのパラドクスは分離され，以降集合論に関しては単純型理論にスリム化された．しかしやがて 1931 年，ゲーデルの自然数論の不完全性定理によりフレーゲ・ラッセル流の「論理主義」が無条件には成立しないことが示された．

当初フレーゲとは独立に数学・論理学の哲学にとり組んだラッセルの最初の成果は『数学の原理』[Russell 1903] であった．この時期ラッセルは，「文中のすべての語は何らかの存在者＝項 (term) を指示し (indicate)，それが語の意味である」とみなす．項は，もの (thing) と概念 (concept) に分かれる．固有名などの意味はもの，述語の意味は概念・命題関数，単称文の意味は（もの＋概念/命題関数の統一体としての）単称命題である．概念・命題関数は，フレーゲの意義同様，外延的ではない．特異なのは，‘all men’, ‘some men’, ‘the man’ のような複合的表示句が意味し指示する「表示概念 (denoting concept)」である．この表示概念そのものが，たとえばある特定の男を「表示する (denote)」のである．つまり表示句は,（フレーゲ的意義に類似な）表示概念を介してある特定の男を表示する．

やがてラッセルは，こうした過剰な実在論から撤退し，表示句・記述句を文中の独立の語句ではなく文脈的定義によって解体消去するという理論（「記

述理論」）を提唱する [Russel 1905]．不確定記述 ‘all men’, ‘some men’ は，全称量化ないし存在量化＋述語に，確定記述 ‘the man’ は，一意性を表すための複合量化と同一性＋述語に分解される（たとえば「現在のフランス王は禿げである」は，「少なくとも一人の，そしてたかだか一人の現在のフランス王が存在し，そして彼は禿げである」[$\exists x(Kx \;\&\; \forall y(Ky \rightarrow y = x) \;\&\; Bx)$] と分析される）．

かくて論理的固有名はフレーゲ的意義なしに端的に個体を指示し，述語は端的に概念・命題関数を指示し，単称文は個体と概念から構成される複合体・単称命題を表す．記述句を含む文はしかるべき量化複合文に分析されて，複合的一般命題を表す．各命題が真のとき，それに対応する複合体（事実）が存在する．ラッセルの命題関数は，よって命題も，先の認識価値や信念文への対処のために，フレーゲの意義に類比的に内包的とみなされる．

しかもラッセルは，「われわれの理解する命題の構成要素は，すべて直接の見知りをもつ実在的存在である」という「認識論的な見知りの原則」を主張した．そして見知りの対象は，感覚与件，意識主体，概念・命題関数である．フレーゲの単称思想の構成要素はすべて意義であるが，ラッセルの単称命題は，個体そのものと内包的概念・命題関数から構成される点に，二人の論理的意味論の基本的対立点がある [野本 1988]．

1.3.2　ウィトゲンシュタインの像理論

フレーゲ，ラッセルから深い影響を受けたウィトゲンシュタインの，意味論における特徴は何か．(i) 固有名には担い手としての対象を意味 B と認めるが，意義は認めず，記述理論はラッセルに従う．(ii) 述語，等号，量化子，関数記号，文結合子，文はすべて名前ではなく，よって意味 B としての概念・命題関数，同一性，関数，2 階概念，真理関数，真理値にはコミットしない．(iii) 事実というカテゴリーを公然と導入し，対応説的真理概念を明示的に受け入れる．(iv) 文の意味 B は否定するが，フレーゲ的な真理条件としての意義という考えを発展させ，真理条件的意味論の基礎を用意する．しかしラッセルの「見知りの認識論的原則」は容認しない．

『論理哲学論考』([Wittgenstein 1921]，以下 [T]) におけるウィトゲンシュ

タインの存在論は，ごく簡単にはこうである．世界は，事実，すなわち，成立している事態，の総体である．対象の配列，結合連鎖が（可能的，現実的な）事態で，事態は互いに独立である．

その意味論は像理論 (*picture* theory) である．文は名前の配列・連鎖である．述語は名前の配列の仕方を表す．文中の各名前は事態中の対象を表示し代表する．文が現実の論理的像であるためには，さらに文中の名前の配列・連鎖が事態中の対象の配列・連鎖と対応せねばならない（文は事態と論理形式を共有せねばならない）．文の表す意義 (Sinn) は，その文の真理条件（当の文が描写する可能的事態）である．文を理解するとは，「もしそれが真ならば，いかなることが成り立つかを知ることである」([T] 4.022–4.024)．だが文の真偽を知るためには，文は現実と比較されねばならない ([T] 4.05)．文の真偽は，文の意義と現実との一致，不一致にある ([T] 4.06)．ここに真理の事実との対応説があからさまに現れている．なおすべての複合文の真偽は，要素文の真偽の真理関数である ([T] 5) [野本 1988].

第2章

モデル論の誕生

2.1 レーヴェンハイム

モデル論の先駆的業績とみなされる論文 [Löwenheim 1915] の定理 2 が，「レーヴェンハイムの定理」で，通常「1 階述語算のある式が充足可能〔当の式を真とするモデルが存在する〕ならば，その式は可算の個体領域のモデルをもつ」と表される．

レーヴェンハイムは，フレーゲの「形式主義批判」を熟知しており，両人には往復書簡公刊計画があったが，ミュンスター空爆ですべて灰燼に帰した．このようにフレーゲを明確に意識しつつも，ブール，パース，シュレーダーの伝統に立って，モデル論の最初の重要な成果を確立した．シュレーダーは『論理代数講義』[Schröder 1890–95] 第 3 巻 (1895) 最終の二講において，1 階と 2 階の式を区別し，1 階量化表現も量化子なしの関係算に還元可能と考えた．このシュレーダーの「圧縮可能性」の強調こそ，レーヴェンハイムの注目するところであった．2 階の式が非可算の実数領域をもつことは知られていたが，レーヴェンハイムは，関係算の 1 階断片が可算個体領域にしか達し得ないことを見出した [Badesa 2004].

レーヴェンハイムの定理は，今日では 1 階論理に関わるとされる．しかし 1 階論理が独立の身分を獲得するのは，後年のことである．元来のレーヴェ

ンハイムの定理は「〔$\exists x \forall y(y \leq x)$ のような〕ある 1 階の〔特殊な〕消散式 (fleeing equation) は，〔上限があるから〕有限領域では妥当なのに，少なくとも可算無限領域の場合には，関係係数 $[x, y]$ の任意の値についてもはや充足されることはない.」([Löwenheim 1915] in [van Heijernoort 1967, p.235]) である．そしてその証明は，スコーレム関数 f を先取りする 1 階存在量化子を関係算に圧縮する手法が用いられている．しかし 1920 年のスコーレムの論文まで，レーヴェンハイムの定理は何の注目も集めなかった．

2.2 スコーレムのパラドクス

スコーレムの論文 [Skolem 1920] の証明は，いわゆるスコーレム標準形と選択公理を用いている．レーヴェンハイムの定理のスコーレム版は以下のようである [Skolem 1920, p.256].

> すべての標準形をした（1 階の）命題は矛盾〔モデルが存在しない〕かまたはすでに有限ないしは可算無限領域において充足可能かのいずれかである．

こうして「レーヴェンハイム・スコーレムの定理」は，「1 階述語論理の真となるモデルをもつどの式も，可算無限な個体領域のモデルをもつ」として一般化される．モデルとは個体領域 D と原始記号解釈 I との順序対 $\langle D, I \rangle$ で，命題の真偽は各モデルに相対化される．記号解釈とは，各原始記号に D 中の適当な対象を付値することである．この定理において 1 階述語論理の式に関連する個体領域と解釈を自由に動かすというモデル論的発想が，明確な方法的意識の下に自覚的に採用され，その後の論理学の意味論に決定的な方向を与えた．

ところでスコーレムには強い構成主義的傾向があった．すでに 1919 年に書かれていた論文 [Skolem 1923] で，パラドクスと型理論の煩雑さとを避け，無制限な量化を含まぬ有限主義的な算術のための新方法を提案していた．それはシュレーダー，レーヴェンハイムの着想を発展させた，つぎのようなス

コーレム関数 f の導入による．たとえば $\forall x \exists y R(x, y)$ といった入れ子型の多重量化文を，$\forall x R(x, f(x))$ のように存在量化子を除去し，さらに普遍量化は自由変数として扱うのである．f による原始再帰的定義を介しての原始再帰的算術の展開である [Skolem 1920; 1923].

さてスコーレムは，1 階述語算の各式についての定理であったレーヴェンハイムの定理を可算式の集合にまで拡張し，それを集合論に適用する．1922 年，スコーレムはレーヴェンハイムの定理を「1 階命題が任意の領域で充足可能ならば，それはすでに可算無限領域において充足可能である」[Skolem 1922, p.293] と定式化し，もし集合論の公理がモデルをもてば，それらは可算モデルをもつことを導くのに応用している．つまり，「ツェルメロの集合論体系は，非可算集合の存在を含意するにもかかわらず，(1 階論理内で) 可算モデルをもつ」(前論文)．このやや意外な結果が，いわゆる「スコーレムのパラドクス」と称されるものである．これが真性のパラドクスかどうか議論があったが，ZF の可算推移モデルを得て，自然数全体の集合のベキ集合 $\mathcal{P}(\omega)$ が非可算ということから，見かけの矛盾を導出可能ではある [Benacerraf 1985; 津留 1999].

> これは非常に驚くべき結論である．というのもこれらの公理体系は，連続体などの可算無限以上の大きな濃度をもつ集合を扱う信頼すべき基礎を形成するために確立されたものだからである．非可算集合の諸性質の十全な記述を与えると考えられている古典集合論の諸定理が，可算無限モデルによって充足可能とされる．したがって集合論の公理は，非明示的にせよ，可算無限を超越した濃度の存在を要請しようと意図しているにもかかわらず，それら公理は可算無限集合をもつ可算無限の体系によって充足可能なのである．この結果をスコーレムは，濃度がモデルに相対的だと指摘することによって，正しく解釈している．ある領域 D に関して異なる濃度をもつような二つの集合も，別の領域 D' に関しては同じ濃度をもちうるのである．[Beth 1959, p.489]

1929 年論文の掉尾においてスコーレムは，集合論の相対性についてつぎのように述べている．

> すでに先に，一般的な集合論的相対性を証明しておいた．集合論のすべての概念や定理は，公理群と相対的に意味をもつのであり，ひとつの領域から別の領域への翻訳によって，すっかり変動可能なのである．とくに顕著なのは，概念の濃度の相対性である．[Skolem 1929, p.273]

スコーレムは，すべての数学的概念が 1 階論理によって述べられるべきだと主張する．そしてレーヴェンハイム・スコーレムの定理によって，集合論は濃度の概念を特定しえないこと，一つのモデルにおいて一対一対応する集合が，別のモデルでは一対一対応しないことがありうるということ，を見出した．かくしてスコーレムは，すべての形式理論が 1 階論理中でそれと明示的に語ることなく，実際に表現可能であると想定したうえで，むしろ濃度のような数学的概念の絶対的な特徴づけ不能性 (noncharacterizability) を主張するのである [Brady 2000, Chap.9]．つまり，スコーレムの主張のラディカルな性格は，カテゴリシティの観念に影響する．スコーレムは 1 階論理中では集合論も実数もカテゴリカルには公理化できないことを主張した．というのも，どちらも可算モデルと非可算モデルの両方をもつであろうからである [Moore 1988]．スコーレムはさらに可算超準モデルを構成することにより，ペアノ公準は 1 階論理の内部では自然数を一意的にカテゴライズしないことを証明した [Skolem 1933; 1934]．

集合論も 1 階中の理論であるという 1 階論理の重視と構成主義的傾向が，「レーヴェンハイム・スコーレムの下降 (downward) 定理」という以下のような一般的定式化をもたらす．

> 可算言語における充足可能な理論は，任意のモデルに対してその部分モデル（その個体領域がもとの集合の真部分集合）であるような，可算の個体領域をもつモデルをもつ．

いま深入りできないが，さらに「スコーレムのパラドクス」は，数学の哲学，言語哲学にも深い影響を与えた．数学の哲学でいえば，ベナセラフの「数

は対象ではない」という反プラトニズムの主張が，その顕著な例である．彼によれば，数が集合でありえないのは，フレーゲ，ラッセル，ツェルメロ流の集合と，フォン・ノイマン流の集合とは互いに両立せず，前進列以上の特定化はできないからである．そして数詞の「指示」を確定できないのであれば，数はおよそ対象ではありえない [Benacerraf 1965; 三平 2000]．この問題はより一般的には，言語哲学においてクワイン，デイヴィドソン，パトナムらによって，「翻訳の不確定性 (indeterminacy)」「指示の不可測性 (inscrutability)」と称される困難と重なる．単称名辞も普通名詞も，指示の枠組を変える，ないし入れ替えれば，その指示対象は変動可能で，そうした枠組，解釈から独立に「指示」は確定せず，各解釈の内部から (from within) しか指示を確定できないという問題である [Quine 1969; Davidson 1979; Putnam 1981; 野本 1997, 6 章]．

かくて 1 階論理が論理のすべてであると最初に提案され，集合論がはじめて 1 階論理内で定式化されたのは，集合論についてのスコーレムの仕事 [Skolem 1923] においてである．だがチャーチによれば，「1 階の関数算が独立の論理的体系として最初に明示的に定式化されたのは，ヒルベルト・アッケルマンの『記号論理学の基礎』(1928) においてである」[Church 1956, pp.288–289]．

1958 年のパリ数学基礎論会議でもスコーレムは，集合論の 1 階論理内での定式化，基本的な数学的概念の相対性をくり返し主張し，タルスキの真理論を攻撃した．これに対し，タルスキはつぎのように反論する．

> すべての理論を可算モデルに還元しようというスコーレム氏に私は反対である ··· レーヴェンハイム・スコーレムの周知の一般化のゆえに，無限モデルをもつすべての形式的体系は，あらかじめ与えられた超限濃度のモデルをもつ．このことから同様に，非可算モデルに有利のように可算モデルを考察から排除するように論ずることもできるのである．[Skolem 1958, p.17; Tarski 1958, p.723]

そしてこのことはスコーレム自身言明していたことである．

有限ではいかなる解釈ももたないどの無矛盾な数言明の集合についても,(可算無限のみならず,また)非可算無限においても,ひとつの解釈が存在する.したがってそれらの言明集合はカテゴリカルではありえない.[Skolem 1934, 註 3, p.366]

かくしていわゆる「レーヴェンハイム·スコーレム·タルスキの上昇(upward)定理」:「可算言語における充足可能な理論は,可算無限個またはより大きい濃度の個体領域をもつモデルをもつ」が定式化される.

集合論の1階論理での定式化のほうは現在も維持されているが,1950年代に(タルスキにより)無限論理が登場し,(モストウスキにより)一般化された量化子の導入後は,1階論理が論理学のすべてでは明らかになくなった.実際,非可算1階言語を使用するマルセフや,上昇レーヴェンハイム・スコーレムと真理定義によって,タルスキが論理を可算の1階言語に制限するスコーレムの試みを斥けた.やがて非可算の1階言語と非可算モデルとが,1階論理の領分の標準的部分となった[Moore 1988, pp.128–129].

2.3 ゲーデルの完全性定理

ヒルベルト・アッケルマンは,「この〔1階関数算の〕公理体系が,少なくとも各個体領域に関して正しい論理式はすべてそれら公理から実際に導出可能であるという意味で,完全であるかどうかは,なお未解決の問題である」[Hilbert and Ackermann 1928, p.68]と述べている.

ゲーデルがウィーン大学博士論文[Gödel 1929; 1930]でこの問題に肯定的に答えたことは周知のことである.ゲーデルは古典1階量化述語算に関する公理と推論規則の完全性を確立した.すなわち,完全性定理は「この1階述語算中の文がすべての可能なモデル中で真ならば,それは1階論理の通常の公理と推理規則によってその体系中で証明可能である」というものである.それはまた「レーヴェンハイム・スコーレムの下降定理」:「1階述語算のすべての式は,反証可能($\neg A$ が証明可能)であるか,または充足可能(可算モデ

ルをもつ，つまり，有限ないし可算無限個体領域において充足可能）かである」を含意する．ゲーデルはこの結果をさらに，こうした体系と整合的な式の可算集合 Σ にも拡張し，Σ が可算モデルをもつことを示した．

さらに可算集合 Σ に関わる，この拡張された完全性と密接に関連する新しい結果を付加している．つまり「可算無限の式体系が充足可能であるための必要十分条件は，すべての有限な部分系が充足可能であること」（定理 X）から，いわゆる「有限性定理」「コンパクト性定理」:「Σ のすべての有限部分集合が充足可能なら，Σ のすべてはある（可算の）モデルで同時に充足可能である」の意味論的証明を与えている．それから，いわゆる「スコーレムのパラドクス」と称される，驚くべき帰結も証明される．「1 階述語算の式のすべての可算無限集合は，充足可能（つまり，その体系のすべての式が同時に充足可能）であるか，またはその論理積が反証可能であるような有限の部分系をもつかである」（定理 IX）．その際元来のレーヴェンハイム・スコーレムの定理では，単に 1 階の個々の式があつかわれていたにすぎないのに対し，充足可能性という意味論的議論が，ラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』という確定した公理体系における証明可能性と結び付けられたのである．

一方でブールにはじまった論理代数的アプローチが，パース，シュレーダーを経て，レーヴェンハイム，スコーレムに至って 1 階の各式に関するレーヴェンハイム・スコーレムの定理という最初のモデル論的定理に到達し，他方フレーゲに始まり，ラッセル・ホワイトヘッドの高階論理の公理体系化とその意味論的アプローチは，ヒルベルトの証明論，ヒルベルト・アッケルマンによる 1 階述語論理の公理体系の整備を経て，エルブランの基本定理，ゲーデルの完全性定理において合流し，1 階述語論理の公理体系に関する（可算モデルにおける）充足可能性（真理性）と証明可能性との同値という形で，見事に綜合されたのである．

2.4 タルスキのモデル論

タルスキは，ワルシャワ大学のセミナーで 1926–28 年にモデル理論の応用を，同じく 1927–29 年のセミナーで，量化子消去法の体系的展開を追究していた．ある公理体系中のすべての言明が，無限量化なしの言明と同値なら，有限回で決定可能であることを証明した．1930 年頃には，初等代数，初等幾何学の公理体系の完全性と決定可能性の証明に成功した（ただし 1948 年まで未公刊）．

2.4.1 タルスキの真理定義

タルスキの博士論文はドイツ語のレジュメが [Tarski 1932] で，ポーランド語での公表は 1933 年，ドイツ語での公刊は 1935 年であった．充足関係の再帰的定義と称される手続きを共有するが，タルスキの真理論には二つのヴァージョンがある．第一は [Tarski 1935] のもので，主に哲学的聴衆向けの，ある種絶対的な意味での真理に関わっている．第二は主に論理学者向けで，1950 年代まで公刊されなかったが，すでに 1930 年までには得られていたものである．それは幾何学や代数のモデルのような数学的構造中での真といった相対的な意味での真理に関わっている．

真理を事実との対応とみなすアリストテレス以来の対応説には，量化の処理や嘘つきのパラドクスなどの困難が絡んでいた．タルスキによると，こうしたパラドクスは日常言語の普遍性に起因する．日常言語は言語外の事柄についての言明を表現するばかりでなく，当の言語それ自身における意味や真理に関する事柄も表現するからである．論文 [Tarski 1935] でタルスキはつぎのように主張する．

> 日常言語では真理という観念を定義する，あるいはこの観念を整合的な仕方で，また論理法則と合致するように使用することさえ，不可能のようにみえる．

実際タルスキは嘘つきのパラドクスによって，メタ言語 L^* 内部の形式言語

L に関する真理定義の補足として，L 自身の内部で L の真理概念を定義できないことを示す（もっとも日常言語の普遍性がその不整合性を不可避にするとしても，なおその言語の断片は形式化可能であり，充足と真理を定義する方法は，メタ言語として機能する日常言語の部分 L^* 内部で，形式化された言語 L に適用可能である）．さてそこでタルスキは，「現在のところ知られている科学的に構成された言語，つまり，演繹科学の形式化された言語をもっぱら考察する」ことを選ぶ．

タルスキは 1933 年こうした困難を克服し，論理学の意味論に画期的な前進をもたらした．彼によると，真理定義は，(i) 内容的に適切で，(ii) 形式的に正しくなければならない．(i) は対応説の要点の把捉，(ii) は嘘つきのパラドクスの回避が要件である．(ii) は対象言語とメタ言語とを区別するという言語の階層化と対象言語の形式化によって果たされる．形式化された言語とは，その言語中の文法に適った表現がすべて有限個の原始的な語彙と有限個の適正な形成規則の再帰的適用によって得られる複合的表現のみからなる言語である．

タルスキの定義もフレーゲやラムジィ同様，同値関係に訴えるものであるが，質料的同値を要求するだけである．タルスキにとっては，この同値テーゼはまったくの約定なのではなく，対象言語のすべての文に関するこのテーゼの導出可能性は，メタ言語中での「真」の定義の正しさのための必要十分条件なのである [野本 1988, 3 章; 大出 1991].

さて一般に，(i) の内容的適切性は，対象言語 L 中の各文に関し，真理定義が，その文の真理条件を示すことができれば満たされる．それはつぎの「真理規約 T(convention T)」が満足されていることを意味する．すなわち，

(T)　x が真であるのは p のときそのときに限る．

のような型の同値文（(T) 文という）が，事実真となる 1 事例として，L 中のすべての文に関して当の真理定義から導かれなければならない，ということである（ただし x には対象言語 L 中の任意の文に対する名前が，p には当の文のメタ言語中での翻訳文がそれぞれ代入される）．各 (T) 文は真理の部分的定義にすぎず，一般的真理定義はこうした部分的定義の全連言である．以

上の真理定義は閉じた文に関わるが，自由変項を含む開放文（述語）に関してはタルスキは「真」の代わりに，つぎのように，個体領域の部分集合である対象の無限列 f による開放文 'Fx' の「充足」という一般的な意味論的観念を導入する．

(S)　対象列 f が 'Fx' を充足するのは，f が F のときそのときに限る．

このようにして無限個の対象に関する量化の場合も，処理可能となる．のみならず閉じた文の「真理」も技術的には「充足」という関係に還元可能である．したがって意味論的には充足関係だけを認めればよい．ただしタルスキは言語の階層性に立って嘘つきのパラドクスを回避したので，「真理」概念も，言語の階層ごとに異なるという体系的多義性を示さざるをえないのである．また対応といっても，属性や事実といった問題的な概念を導入する必要はなく，存在論的には単に対象の無限列に加担するのみでよい．

しかしながら (T) 文中の p，また (S) 中の述語の名前，に代入されるべきなのは，x によって名指される対象言語中の文，または述語に対するメタ言語中の翻訳であり，こうした翻訳関係・同義性はすでに前提されていることに注意しなければならない．

またタルスキの元来の真理定義は，絶対的な概念であるが，彼はまたモデルに相対化された相対的真理概念も，一般的な場合として考慮している．すでに 1930 年に念頭におかれていたにもかかわらず，ある構造中での充足と真理という観念の定義を 1957 年まで公刊しなかった [Tarski and Vaught 1957]．その定義の骨子は，形式言語 L に対する構造（ないしモデル）M とは，M の空でない個体領域 D と各記号に D 中の適切な対象を割り当てる付値 σ との順序対 $\langle D, \sigma \rangle$ である．かくて，「充足」「真」はこの構造ないしモデルに相対化される [Feferman 2004, pp.277f.]．解釈ないしモデルに相対化された真理概念は，カルナップ以後にモデル論的意味論において大いに活用されることになる．その場合には，絶対的真理概念は特定の意図されたないし関連する解釈（ないしモデル）における真理と同一視される．

2.4.2 タルスキ真理理論の衝撃

論理学者たちの間では，1950 年代までタルスキの厳密な定義は，規範にはならなかった．1930 年代半ばにタルスキの真理論を最初に伝えられた哲学者は，ポパーとカルナップで，二人はすぐ受け容れた．しかし他のウィーン学団のメンバー，とくにノイラートは批判的だった．意味論的諸概念が，厳密な経験主義的・反形而上学的見解と折り合うかどうかが争われた．その後も哲学者たちの間では，タルスキの真理定義の哲学的意味が検討され続けている[1]．

モデル論の歴史において 1945 年は分岐点をなす．それはタルスキがアメリカに亡命し，カルフォルニア大学バークレー校を拠点に彼の論理学派を築き始めたときであり，モデル理論がその巨大な発展を開始したときだからである [Feferman 2004, p.281].

> モデル理論への彼の影響は，いたるところに感知される ··· モデル理論中でこの時期に (1945–71) なされた仕事の多くは，タルスキ自身によるか彼の親密な同僚たちによるかまたは彼の学生，そのまた学生による．[Chan 1974, p.73]

タルスキの真理理論は，論理学，とくにモデル理論の分野での技術的な発展に最も強大な衝撃を与え，1950 年代以降モデル論は 1 階論理から始まって，目覚ましい仕方で拡張されていく．タルスキのアプローチは，論理を超えて，自然言語の意味論に拡張され，弟子のモンタギューによってモンタギュー文法として展開される．一方，1970 年代からタルスキの真理論を逆転用して，自然言語の意味理論を与えようとしたデイヴィドソンの試みは，言語哲学に甚大な影響を与えた．さらに，「いくらか」「多く」「大部分」等々の一般化された量化をも取り扱われるに至っている．またコンピュータ科学においてはプログラムの「表示意味論」といった形で応用されている．1930 年代のタルスキのアプローチは，メタ数学においては，1920 年代後半のヒルベルトに

---

1) 本論では入れないが，[Kripke 1975] やバーワイズについては [大出 1991] を，またバーワイズ・エチメンデイ『うそつき』(金子洋之訳，産業図書，1992) 参照.

よる証明論に先導された統語論的な対処法から，集合論的，意味論的対処法へ本質的な変換をもたらした [Feferman 2004, p.123].

第3章

内包的意味論の展開

3.1　カルナップの意味論

タルスキ的意味論は，ある言語の表現に関する充足，指示，真理，定義可能性などの諸概念に関わり，当の言語中の表現とその諸対象との間の一定の関係についてのメタ的な考察であった．

カルナップは 1930 年，ゲーデルおよびタルスキとの対話を通じ，「対象言語について精確な仕方で語りうるメタ言語が存在せねばならない」と納得し，ゲーデルの算術化の方法により算術の不完全性定理（1931 年公刊）と，ある言語の統語論が当の対象言語中で定式化不可能であることとを知る．かくてウィトゲンシュタインの 1 言語主義を放棄し，言語/メタ言語の区別を採用する．そしてまずある言語の論理的統語論を発展させる．『言語の論理的統語論』(1934–36) で，構成主義的な「言語 I」を構成し，また「寛容の原理」により古典数学・物理学の定式に十分包括的な「言語 II」も構成する．公式には論理的統語論は，記号の意味には言及しないとされるが，しかし事実上は重要な意味論的要素――論理的真理定義，分析性，真理表，意味論的付値，意味論的アンティノミーなどの議論――が含まれていた．

統語論への重要な補完は意味論であって，タルスキの論文発刊 (1933) 以前にタルスキおよびデーデルとの対話から，統語論とは別に，事実と言語との

関係について指示や真理について語れるような，意味論のための新しいメタ言語がなければならないことを了解した．タルスキがカルナップに意味論の可能性を納得させた 1935 年春以降，カルナップは論理的意味論の最も熱烈な支持者となった．『論理と数学の基礎』[Carnap 1939] において，自然言語断片や物理言語に意味論を与える方法を示した．つまり名前にものを，述語にものの性質を指示させ，こうした指示と相対的に文の真理条件を定義する．より正確な定式化は，『意味論序説 I』[Carnap 1942] で与えられる．たとえば，意味論的体系 S では，① DesInd（'a'，シカゴ）; ② DesAttr（'P'，大きいという性質）．①②からつぎの③④が帰結する（DesInd は「個体指示」，DesAttr は「属性指示」，DesProp は「命題指示」を表す）．

③ DesProp（'$P(a)$'，シカゴは大きい）．④ '$P(a)$' が S 中で真なのは，シカゴは大きいときそのときに限る．より一般的には，

(C) 文 s が S 中で真なのは，DesProp(s, p) かつ p であるような命題 p が存在するときそのときに限る．

(C) はタルスキの (T) 規約に対応するが，タルスキでは 's' と p とは，単に翻訳関係にあるにすぎなかったが，指示関数 Des によって言語と世界との間の意味論的関係が明示的になるという利点がある．論理的定項の真理条件も以下のように与えられる．

⑤ 否定文「p でない」が真なのは，文 'p' が真でないときそのときに限る．

⑥ 条件文「p ならば q」が真なのは，文 'p' が真でないか，または 'q' が真のときそのときに限る．

⑦ 普遍量化文「すべての x は，F である」が真なのは，変項 'x' に代入されて形成されるすべての文が真，つまり，すべてが F のときそのときに限る．

後続のモデル理論では，カルナップの Des は言語からモデル構造への解釈関数に対応する．対象言語がすでに解釈済みと想定していたタルスキは，この解釈関数を明示的にしていなかった．この点ではカルナップの意味論の扱いは，自然言語への応用に関しても，より満足のゆくものである．ところでチャーチはそのレビュー [Church 1943] で，フレーゲに由来する「パチン

コ (slingshot) 論法」を用いて，カルナップが文の指示を「命題」とする点を批判し，真理値と解すべきだと主張する．フレーゲの意味と意義の区別に言及しつつ，文を命題の名前，述語を性質の名前とするカルナップの意味論では「外延性の原則」が成り立たないと指摘する．批判に応え，カルナップは以下の『意味と必然性』[Carnap 1947] で修正する．

3.2 内包論理の意味論——様相論理

「様相 (modality)」とは，「可能」「必然」「偶然」といった概念である．言表に関わる様相は「言表 (de dicto) 様相」，事象の性質に関わる「本質的，偶有的」といった様相は「事象 (de re) 様相」といわれる．様相概念は，アリストテレス以来中世の論理学・形而上学でさまざまな研究がなされ，近世でもカントの超越論的論理学に登場する．現代論理では当初は敬遠されるが，1910 年代に C.I. ルイスらにより形式体系が整備される．意味論は 1940 年代にカルナップが先鞭をつけ，ライプニッツ，さらに 13 世紀のドゥンス・スコトゥスに遡る「可能世界」意味論が，1960 年代に至ってクリプキ，ヒンティカ，モンタギュー，カプラン，D. ルイス，スタルネイカーらによって目覚ましく展開されて，哲学界，論理学界を席巻する．また可能世界意味論と類似の着想は，時制論理，義務論理，反事実条件法や因果性，「知・信」のような認知様相の分析にも使用される [野本 1988; 飯田 1995].

3.2.1 カルナップの内包論理 [野本 1988; 飯田 1995]

(1)「様相と量化」[Carnap 1946]

この論文においてカルナップは，「論理的必然性」を「論理的真理ないし分析性」で説明しようとする．すなわち，対象言語中の「必然的に p」の真理を，メタ言語中の「‘P’ は論理的に真」によって意味論的に解明しようとする．その際「論理的真理」の解明に用いているのは「状態記述 (state-description)」である．直観的にはライプニッツやウィトゲンシュタインの可能世界記述から着想を得ている．一つの状態記述とは，半ば統語論的ですべての個体に関

し，いかなる特性や関係をもつかもたないかといった可能的事態の総体としての，特定の可能世界の完全記述である．たとえば，ある要素文がある状態記述に埋め込まれるのは，当の文が当の状態記述の成員である場合に限る，また全称文がある状態記述に埋め込まれるのは，その全代入事例が当の状態記述に埋め込まれる場合に限る，のように準意味論的規則が与えられる．さて「論理的真理」はつぎのように定義される [Carnap 1946, p.50].

(L) 文 'p' が論理的に真であるとは，'p' がいかなる状態記述にも埋め込まれるということである．

カルナップは「必然的に p」が真であることの必要十分条件を，「'p' の論理的真理性」に求めたから，(L) により，「必然的に p」の真理性は，'p' があらゆる状態記述に埋め込まれることである．それは直観的には「あらゆる可能世界で真」というライプニッツの考えを反映している．また量化文「すべては必然的に p である」の真理性は，代入事例的に解釈され，そのすべての代入事例「必然的に p」が真，つまり 'p' の論理的真理性に還元される．

(2)『意味と必然性』[Carnap 1947]

「(論理的) 真理性」の解明は，「様相と量化」と同様である．さらにフレーゲの意味と意義の区別を外延と内包の区別に重ねる．そして主張文，個別名辞，述語を指示子と一括する．二つの指示子が同値（真理値の一致する文，同一個体を指す個別名辞，同一の個体クラスに適用される述語）の場合，それらは同一の外延をもつ．また二つの指示子が論理的に同値（同値性が意味論的規則のみから帰結する）の場合，同じ内包をもつ [Carnap 1947, §5]．かくして，チャーチの批判を容れて，文の外延はフレーゲ流に真理値，内包は命題 [Carnap 1947, §6]，個別名辞の外延は指示個体，内包は個体概念 (individual concept) と称され，述語の外延は当の述語が適用される個体のクラス，内包は特性 (property) と称される．外延的文脈とは，その外延・真理値が当の文の構成要素の外延の関数である場合であり，内包的文脈とは，その内包・命題が構成要素の内包の関数の場合である [Carnap 1947, §11]．外延的文脈に関しては，同じ外延をもつ指示子を交換してもその真理値は変わらない（外

延的代入原理)．内包的文脈では，同じ内包をもつ指示子を交換しても命題は変わらない（内包的代入原理 [Carnap 1947, §12]）（信念文は内包的でもなく，内包的に同型（同一の内包的構造）とみなされた)．

様相論理の対象言語では，変項はすべて内包を値としてとる．それでは内包，たとえば，個体概念とは何か．カルナップはここで，すでに導入していた「座標言語 S」を考え，S の個体定項は x，y 両軸に関し順序づけられた領域中の特定の位置を指すと仮定する．よって各個体定項と位置とは一対一対応する（カプランの「標準名」，クリプキの「固定指示子」の先駆)．したがって，'$a = a$' は論理的に真，'$a = b$' は論理的に偽である．個体概念とは，各状態記述により表現されるすべての命題に対し，正確に一つの個体定項を付値する関数である [Carnap 1947, §40]．よって開放様相文「必然的に Px」がある状態記述 'H' に埋め込まれる（可能世界 H で真になる）のは，すべての状態記述に関し，個体概念が 'x' に付値する個体定項 'c' を，'x' に代入した結果の文 'Pc' が，当の状態記述に埋め込まれる場合である．

3.2.2　チャーチの内包論理 [野本 1988]

すでに早期にチャーチのテーゼを提唱し，単純型理論 [Church 1940] と λ 計算 [Church 1941] を提出し，フレーゲ流の統語論を単純型理論によって形式的に整備したチャーチは，間接話法や信念報告などの間接的文脈に関するフレーゲのアイディアを，内包論理の形式的体系の意味論として展開した．それが「意義と表示の論理」[Church 1951] で，最晩年に至るまで，展開と改定がなされる．それは対象言語中の各表現が，フレーゲ流の意義と表示（＝意味）の双方を意味論値としてもつ特異な内包意味論である．

まず存在者の型を，型 o（真理値)，型 ι（個体)，型 $\alpha\beta$（関数）に区別し，それぞれ文，個別名辞，関数詞に付値される表示とみなす．フレーゲ的意義をラッセル流にコンセプト（概念）と呼び，型 o_1（命題＝フレーゲの思想)，o_2（命題概念＝フレーゲの間接的思想)，$\cdots$，o_{n+1}，また型 ι_1（個体概念＝フレーゲの意義)，ι_2（間接的意義)，$\cdots$，ι_{n+1}，型 $\alpha_1\beta_1$（関数詞の意義)，$\alpha_2\beta_2$，$\cdots$，$\alpha_{n+1}\beta_{n+1}$ といった位階構造を導入する．すべての固有記号の表示や意義にはこうした型が付せられる．

λ は非固有記号で，単純述語 '$\lambda x_\iota M_o$' には，個体（型 ι）から真理値（型 o）への型 $o\iota$ の関数（フレーゲの「概念 (Begriff)」に相当）が，条件法 'C_{ooo}' には真理値（型 o）の対から真理値（型 o）への真理関数が付値される．普遍量化記号 '$\Pi_{o(o\iota)}(\lambda x_\iota A_o)$' には，型 $o\iota$（フレーゲ的 Begriff）から型 o の真理値への関数（型 $o(o\iota)$）が付値される．

初期ラッセル流に「個体概念 ιo は，個体 ι のコンセプトである（ないし，個体 ι を表示する (denote))」は，表示関数 $\Delta o\iota_1\iota$ を用いて，'$\Delta o\iota_1\iota(a_{\iota_1}, a_\iota)$' と表記される．また「命題 Mo_1 は真理値 Mo のコンセプト（思想）である」は，'$\Delta oo_1 o(Mo_1, Mo)$ ' と表記される．チャーチはまた対象言語中に様相子「必然的に Mo_1 である」を導入し '$Noo_1 Mo_1$' と表記する．Noo_1 は命題（型 o_1）から真理値 o への関数である．

また意義の同一性規準として三つの選択肢 (0),(1),(2) を提示する．様相論理に関しては，最も弱い選択肢 (2)：「二つの名前 A, B が同一の意義をもつのは，$A = B$ が論理的に妥当の場合である」でよいとみなす．以下改定版として選択肢 (2-2)[Church 1973]，選択肢 (0)[1974]，選択肢 (0)[Church 1993] がとり上げられ，フレーゲの着想を厳密に整備しつつ，特異な内包論理の意味論を構成する．

3.3　モンタギュー文法

カルナップ，チャーチらの内包論理の意味論への試みは，1960 年代に入って急速に展開された．フレーゲ，タルスキ，カルナップ，チャーチの影響下，タルスキの弟子モンタギューの普遍文法の試みもその一環である．彼は自然言語と論理的人工言語との間に重大な理論的差異を認めない．数学的に厳密で自然な単一理論の枠組内で，両方の言語の統語論と意味論を包括可能だと考える．その点はチョムスキー派と変わらないが，しかし言語学を心理学とみなさず，厳密数学の一分野だと考える．また深層構造と表層構造との区別をさして重要とは考えず，さらに変形生成文法が十全で包括的な意味論を用意できるか疑問視している [Montague 1974; 野本 1977; 坂井 1979; 白井 1985].

以下簡単にモンタギューの統語論，内包的意味論，さらに語用論 (pragmatics) を，英語断片の適用例を交えつつ概観する．いずれも統語論的カテゴリーと，それに相即する意味論的型付の言語である．ここでは曖昧言語もしかるべき分析によって明晰化可能とみなす．

3.3.1　古典論理の言語 L^0 の統語論

まず古典論理の言語 L^0 の統語論は，形式的には $\langle X^0_\delta, F^0_i, S^0_i, \mathrm{FOR}\rangle_{\delta\in\Delta^0}$ という統語論的システムとして与えられる．

(1) 基本表現と統語論的カテゴリー

(i) δ は L^0 中の表現の統語論的カテゴリーを，Δ^0 はカテゴリーの集合を表す．L^0 の δ には個体定項（個別名辞）ICT，動詞句 1V，単項結合子 1C（否定），2 項結合子 2C（連言，選言），式 FOR（主張文）が含まれる（すなわち $\Delta^0 = \{\mathrm{ICT, 1V, 1C, 2C, FOR}\}$）．

(ii) X^0_δ はカテゴリー δ の基本表現の集合を表す．X^0_{ICT} は個体定項‘a’,‘b’,$\cdots$ の集合，X^0_{1V} は動詞句‘P’,‘Q’,$\cdots$ の集合，X^0_{1V} は否定記号‘$\neg$’の集合，X^0_{2C} は連言‘$\wedge$’，選言‘$\vee$’の集合，X^0_{FOR} は式の集合を表す．

(2) 構造演算と統語論的規則

(i) F^0_i は基本表現から複合表現を形成する関数で，「構造演算」と呼ばれる．F^0_0, F^0_1 は式‘p’,‘q’と結合子を結合して否定式や連言式，選言式を得る演算で，たとえば $F^0_0(\neg, p) =$ ‘$\neg\ p$’, $F^0_1(\wedge, p, q) =$ ‘$p \wedge q$’．また F^0_2 は動詞と個体定項を結合して式を得る演算で，$F^0_2(\phi, a) =$ ‘ϕa’.

(ii) S^0_i は以上の構造演算を用いて，基本表現から式や複合式を形成する統語論的規則である．S^0_0:$\langle F^0_0$, $\langle$1C, FOR$\rangle$, FOR$\rangle$; S^0_1:$\langle \mathrm{F}^0_1$, $\langle$2C, FOR, FOR$\rangle$, FOR$\rangle$; S^0_2:$\langle F^0_2$, $\langle$1V, ICT$\rangle$, FOR$\rangle$.

3.3.2　L^0 の意味論

先の統語論にフレーゲ流の意味論を与える．L^0 の統語論的カテゴリーには，それぞれ意味論的型が対応する．① 個体定項 ICT には個体の型 e，② 式

FOR には真理値の型 t，③ 単項結合子 1C，2 項結合子 2C，動詞句 1V という関数記号には，それぞれ型 σ から型 τ への型 $\langle\sigma,\tau\rangle$ の関数が対応する．

さて個体領域を D，真理値集合を $\{1,0\}$，集合 X に属する存在者から集合 Y に属する存在者への関数の集合を Y^X と表し，各記号にその指示対象を付値する意味論的関数 f を導入する．

個体定項 'a' の指示対象 $f(\text{‘}a\text{’})$ は，型 e の個体 ($f(\text{‘}a\text{’}) \in D$)，式 '$p$' の指示対象は型 t の真理値 ($f(\text{‘}p\text{’}) \in \{1,0\}$)，結合子の指示対象は真理関数で，たとえば $f(\text{‘}\neg\text{’}) = H_1$，$f(\text{‘}\wedge\text{’}) = H_2$ とすると，H_1 は $H_1(1) = 0, H_1(0) = 1$ と真理値を逆転する関数の型 $\langle t,t\rangle$，H_2 は $H_2(1,1) = 1, H_2(1,0) = H_2(0,1) = H_2(0,0) = 0$ という真理値の対から真理値への型 $\langle\langle t,t\rangle,t\rangle$ の関数である．したがってつぎのような意味論的規則 M_0^0, M_1^0 など（合成原理）が成り立つ．

$$M_0^0 : f(\text{‘}\neg\text{’})(f(\text{‘}p\text{’})) = f(\text{‘}\neg\ p\text{’}),$$
$$M_1^0 : f(\text{‘}\wedge\text{’})(f(\text{‘}p\text{’}), f(\text{‘}q\text{’})) = f(\text{‘}p \wedge q\text{’}).$$

また単文の統語論的規則 S_2^0 に対応するつぎの意味論的規則 M_2^0 が成り立つ．

$$M_2^0 : f(\text{‘}P\text{’})(f(\text{‘}a\text{’})) = f(\text{‘}Pa\text{’}).$$

動詞句 'P' の指示対象は，個体から真理値への型 $\langle e,t\rangle$ の関数（フレーゲの概念 (Begriff) に相当）で '$\lambda x[Px]$'，また 'Pa' は '$\lambda x[Px]a$' と表記する．

かくして命題論理 L^0 の外延的モデルは，$\langle D,f\rangle$ で，個体領域 D がモデル構造，意味論的関数 f はモデル付値関数と呼ばれる．

3.3.3　英語断片 L^1

つぎに L^0 よりずっと複雑な曖昧言語である英語断片 L^1 に関するモンタギューの分析を簡略化してみておこう．その統語論的システムは，$L^1 = \langle X_\delta^1, F_i^1, S_i^1, \text{FOR}\rangle_{\delta\in\Delta^1}$ である．

(1) 基本表現とそのカテゴリー

単名 N（固有名，代名詞），単項結合子 1C（否定），2 項結合子 2C（接続詞），自動詞 1V，他動詞 2V，普通名詞 CN，副詞 A1V，形容詞 CAN，副文詞 AFOR，冠頭詞 ART（冠詞，量化子），繋辞 COP，命題態度 PA（補文をとる動詞），式 FOR など．

$\Delta^1 = \{\mathrm{N, 1C, 2C, 1V, 2V, CN, A1V, CAN, AFOR, ART, COP, PA, FOR}\}$.

例をいくつかあげておこう．$X_{\mathrm{N}}=$ {‘John’,‘Mary’}; X_{1C}={‘¬’}; X_{2C}={‘∧’,‘∨’}; X_{1V}={‘walks’}; X_{2V}={‘loves’}; X_{CN}={‘man’,‘woman’}; X_{A1V}={‘quickly’}; X_{ACN}={‘old’}; X_{AFOR}={‘necessarily’}; X_{ART}={‘every’,‘a’,‘the’}; X_{COP}={‘is’}; X_{PA}={‘believes that’}.

(2) 構造演算と統語論的規則

① 式と結合子から複合式をつくる構造演算 F_i^1 は，F_i^0 と同様で規則 S_i^1 も同様である．

② 動詞句と単名から単文を形成する構造演算 F^2 も同様で，たとえば F^2（‘loves Mary’,‘John’）[すなわち ‘λx[x loves Mary] John’]=F^2(‘John loves’, ‘Mary’)=‘John loves Mary’ となり，その統語論的規則は S^2:⟨F^2,⟨1V, N⟩, FOR⟩ となる．

③ 他動詞と単名を結合して動詞句を形成する構造演算 F^3 は，F^3（‘loves’, ‘John’）=‘John loves’ ないし ‘loves John’[すなわち ‘λx[x loves John]’] で，統語論的規則は，S^3:⟨F^3,⟨2V, N⟩, 1V⟩.

④ 形容詞と普通名詞を結合して名詞句を形成する構造演算 F^4 は，F^4(‘old’, ‘man’)=‘old man’ で，その統語論的規則は S^4:⟨F^4,⟨CAN, CN⟩, CN⟩.

⑤ 副詞 A1V と動詞から動詞句を形成する構造演算 F^5 は，たとえば F^5(‘quickly’,‘walks’) =‘quickly walks’[すなわち ‘λx[x quickly walks]’] で，その統語論的規則は S^5:⟨F^5,⟨A1V, 1V⟩, 1V⟩.

⑥ 繋辞と単名および単名または形容詞から文を形成する構造演算 F^7 は，たとえば F^7(‘is’,‘John’,‘old’) =‘John is old’. よってその統語論的規則は，S^7:⟨F^7,⟨COP, N, N(or ACN)⟩, FOR⟩.

⑦ 副文詞と文から別の文を形成する構造演算 F^8 は，たとえば，F^8(‘necessarily’,‘Mary is Mary’) =Necessarily Mary is Mary．よって統語論的規則は S^8:$\langle F^8, \langle \text{AFOR, FOR} \rangle, \text{FOR} \rangle$.

⑧ 命題的態度と単名，文から信念文などを形成する構造演算 F^9 は，F^9(‘believes that’,‘Mary’,‘John is old’) = ‘Mary believes that John is old’. よってその統語論的規則は，S^9:$\langle F^9, \langle \text{PA, N, FOR} \rangle, \text{FOR} \rangle$.

普通名詞と冠頭詞・量化子から，量化名詞句を形成する構造演算 F^6，たとえば，F^6(‘every’,‘man’)= ‘every man’, F^6(‘the’,‘man’)= ‘the man’, F^6(‘a’, ‘man’)=‘a man’ を統一的にどう扱うのが適切であろうか．モンタギューの提案は後段でとり上げよう．

(3) L^1 の意味論

① 単名 N，結合子 1C, 2C，自動詞 1V，式 FOR の各解釈はすでに L^0 で与えられている（ただし単名 N については，量化名詞句との統一的扱いについて再考を要する）．

② 他動詞 2V は，N と結合して 1V を形成するから，型 $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ の関数が付される．よって S^3 に対応する意味論的規則 M^3 は，たとえば M^3: f(‘loves’)(f(‘John’))=f(‘John loves’).

③ 普通名詞 CN（例:‘man’）の指示対象は，‘$\lambda x[\text{man}(x)]$ ’ と表記し，‘man’ を満足する個体のクラスというより，自動詞 1V 同様，個体から真理値への特性関数（フレーゲ的な概念で，型 $\langle e, t \rangle$）とする．

④ すると形容詞 CAN の指示対象は，CN に属する型 $\langle e, t \rangle$ の表現の指示対象から，別の CN の指示対象への型 $\langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$ の関数だということになる．よって S^4 に対応する意味論的規則は，たとえばつぎのようになる．$M^4 : f(\text{‘old’})(f(\text{‘man’})) = f(\text{‘old man’})$.

⑤ 副詞 A1V の指示対象は，1V の指示対象（型 $\langle e, t \rangle$）から別の 1V の指示対象への関数だから，その型は $\langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$ となる．よって S^5 に対応する意味論的規則 M^5 はつぎのごとくである．$M^5 : f(\text{‘quickly’})(f(\text{‘walks’})) = f(\text{‘quickly walks’})$.

その他のカテゴリーへの型付値は内包論理の意味論で扱う．

3.3.4 内包論理 IL

時制と様相論理のジョイント・システム中に，新しい基本表現として⑨ 単項結合子 ‘P’ を導入する．‘$P(\phi)$’ は英語断片では ‘It was the case that ϕ’ に相当する．よってその統語論的カテゴリーは AFOR で，統語論的規則は $\langle F^9, \langle$AFOR, FOR$\rangle$, FOR$\rangle$ である．

時制様相論理の意味論では，モデル $\langle D, f\rangle$ の代わりに，$\langle\langle D, I, W, <\rangle, f\rangle$ という解釈 B システムを採用し，それは解釈構造 $\langle D, I, W, <\rangle$ と解釈付値関数 f から構成される．D は空でない個体の集合，I は先後関係 $<$ により線形順序付けられた空でない時点 i の集合，W は可能世界 w の空でない集合である．式の真理値は時点と世界に相対化される．モデルは解釈 B ではなく，B と指標 (index)（時点 $i \in I$ と世界 $w \in W$ の順序対 $\langle i, w\rangle$）との順序対 $\langle B, \langle i, w\rangle\rangle$ である．解釈は表現に指示対象というよりは内包ないし（フレーゲ的な）意義を付値するからである．

ある任意の表現 ζ の時点 i 世界 w における外延ないし指示対象 Ext $_{B,i,w}(\zeta)$（トマソンの表記に従う (Thomasson in [Montague 1974])）同様，ζ の内包 $\mathrm{Int}_B(\zeta)$ が存在する．内包･意義はある型 τ に対して型 $\langle s, \tau\rangle$ をもつ．すると内包と外延とは相互定義可能となる．つまり h=$\mathrm{Int}_B(\zeta)$ の場合，$\mathrm{Ext}_{B,i,w}(\zeta) = h(\langle i, w\rangle)$ であり，$\mathrm{Ext}_{B,i,w}(\zeta)$ が型 τ の場合，$\mathrm{Int}_B(\zeta)$ は $\langle i, w\rangle$ から型 τ の B の可能的指示対象の集合への関数 h であって，すべての $i \in I$ および $w \in W$ に関して，$h(\langle i, w\rangle)$=Ext $_{B,i,w}(\zeta)$ なのである．

直観的には $\mathrm{Ext}_{B,i,w}$(‘a’) は，指標 $\langle i, w\rangle$ における ‘a’ によって指示される個体であり，述語 ‘ϕ’ の外延 Ext $_{B,i,w}$(‘ϕ’) は，$\langle i, w\rangle$ において ‘ϕ’ を満足する個体の集合（D の部分集合）である．

そこで改めてこれまでの統語論的カテゴリーのいくつかに，内包論理における内包の意味論的型を対応させてみよう．

統語論的カテゴリー	内包の意味論的型
① N（単名）	$\langle s, e\rangle$
② 1V（自動詞）	$\langle s, \langle e, t\rangle\rangle$
③ 1C（単項結合子）	$\langle\langle s, t\rangle, \langle s, t\rangle\rangle$
④ FOR（式）	$\langle s, t\rangle$

しかし‘Mary’のような単名と，冠頭詞・量化子 ART ＋普通名詞から形成される‘the man’,‘every man’,‘a man’などのラッセルのいう「表示句 (denoting phrase)・記述 (description)」の内包と指示対象をどう考えるべきか．ラッセルの「記述理論」[Russel 1905] 以降では，こうした表示句・記述は単名のようには独立で内包も外延ももたず，ただ他の動詞その他の述部 ϕ と合体して，文全体に貢献するのみとされる．たとえば‘Every man ϕ’は，‘$\forall x[\mathrm{man}(x) \to \phi(x)]$’のように，‘A man ϕ’は‘$\exists x[\ \mathrm{man}(x)\ \wedge\phi(x)]$’のように，‘The man ϕ’は‘$\exists x[\mathrm{man}(x)\ \wedge\forall y[\mathrm{man}(y)\to y = x]\ \wedge\phi(x)]$’のように解体されてしまう．しかし少なくとも英語などの印欧語では，初期ラッセル [Russell 1903] が「表示句」と一括したように，フレーゲのいう「固有名」同様，単名と同じ統語論的カテゴリーをもつとみなすのが自然である．そこでモンタギューは，これら単名と表示句を統一的に扱う方法を考案する．自然言語の統語論・意味論を考察するには分析の道具である人工言語のほうが自然言語に従うべきだからである．そこでモンタギューは，こうした単名・表示句を個体の「特性」の集合を指示すると考えるのである（これはライプニッツのモナドロジーの一つの有力な解釈，つまりモナドとはその特性の共可能的なすべての集合，完全個体概念であるという考えに通じる）．まず予備的に確認できるのは，① 型 e の単名 N の内包はフレーゲ的意義，カルナップ・チャーチ流には「個体概念」に相当し，その型は $\langle s, e\rangle$ である．② そして個体の「特性」とは，普通名詞や自動詞 1V の外延である型 $\langle e, t\rangle$ をもつフレーゲ的概念の内包で，その型は $\langle s, \langle e, t\rangle\rangle$ である．④ また文・式 FOR の外延である真理値 t に対し，その内包である「命題」の型は $\langle s, t\rangle$ である．

①* すると ϕ を型 $\langle s, \langle e, t\rangle\rangle$ という特性変項，$^{\vee}\phi$ をその内包表記とすると，英語の単名‘John’は内包論理 IL の表記：$\lambda\phi[[^{\vee}\phi](\mathrm{j})]$ に翻訳される（j は

ジョンを表す IL での e タイプの個体定項である）．また ‘every man’ は IL 中で $\lambda\phi\forall x[\mathrm{man}'(x)\rightarrow[^{\vee}\phi](x)]$ と翻訳され，man′ は IL 中での ‘man’ の翻訳である．‘a man’ は IL 中で $\lambda\phi\exists x[\mathrm{man}'(x)\wedge[^{\vee}\phi](x)]$ と，また ‘the man’ は $\lambda\phi[\exists x[\mathrm{man}'(x)\wedge\forall y[\mathrm{man}'(y)\rightarrow x=y]\wedge[^{\vee}\phi(x)]]]$ と翻訳される．このように単名 N，表示句 ART というカテゴリーは，いずれも ϕ 抽象の含まれる高階の名詞句で，その内包の型は $\langle\langle s,\langle e,t\rangle\rangle,t\rangle$ に統一される．

さてこうした単名，表示句の外延は，その内包（意義・個体概念）により，指標 $\langle i,w\rangle$ と相対的に定まる．‘John’ の指標 $\langle i,w\rangle$ における外延・指示対象は，その指標において個体ジョンのもつ特性の集合である．‘every man’ の $\langle i,w\rangle$ における外延は，$\langle i,w\rangle$ においてすべての人間がもつ特性の集合である．また ‘a man’ の $\langle i,w\rangle$ における外延は，$\langle i,w\rangle$ においてある人間がもつ特性の集合であり，‘the man’ の $\langle i,w\rangle$ における外延は，$\langle i,w\rangle$ において存在するただ一人の人間がもつ特性の集合である．

過去時制子 ‘P’（前出の⑨）はカテゴリー AFOR をもち，IL 中では $\lambda\phi[P^{\vee}\phi]$ と翻訳され，ϕ の内包＝命題の型 $\langle s,t\rangle$ から真理値 t への型 $\langle\langle s,t\rangle,t\rangle$ が対応する．

‘It was the case that ϕ’ の解釈 B，時点 i 世界 w における真理条件は，以下のようになる．

$$\vDash^{B}_{\langle i,w\rangle} P^{\vee}\phi \Longleftrightarrow \exists j[j,i\in I\wedge j<i\wedge \mathrm{Int}_{B}\phi(\langle j,w\rangle)=t].$$

‘necessarily’（前出の⑦）N はカテゴリー AFOR をもつが，IL 中では $\lambda\phi[\Box^{\vee}\phi]$ と翻訳され，ϕ の内包＝命題の型 $\langle s,t\rangle$ から真理値 t へ型 $\langle\langle s,t\rangle,t\rangle$ が対応する．解釈 B，世界 w における ‘necessarily ϕ’ の真理条件は（ルイスの S5 では）つぎのようになろう．

$$\vDash^{B}_{\langle i,w\rangle} \Box^{\vee}\phi \Longleftrightarrow \forall w[w\in W\rightarrow \mathrm{Int}_{B}\phi(\langle i,w\rangle)=t].$$

カテゴリー PA（⑧）の ‘believes that’ には，型 $\langle\langle s,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$ が相当する．何らかの述語を含む命題を信じるという態度を示すからである．

‘John believes that ϕ’ は，IL 中へ ‘John’ を j に，PA を believe’ に，信念内容である命題を変項 ϕ の内包 $^{\vee}\phi$ と翻訳すると全体は，‘believe’(j, $^{\vee}\phi$)’

と翻訳される．

'John believes that there is a spy' のような「言表についての信念 (de dicto belief)」は，同様にして 'believe'(j, $^{\vee}\exists x[\text{spy}'(x)]$)' と表記できよう．他方 'There is someone that John believes to be a spy' といった「事象についての信念 (de re belief)」は，'$\exists x$[believe$'$(j, $^{\vee}\text{spy}'(x)$)]'，「内部量化 (quantifying in)」をより顕在化させれば，'$\exists x[\lambda y[\text{believe}'(\text{j}, {}^{\vee}\text{spy}'(y))]\ x]$' のように表記でき，二つの信念をはっきり区別できよう．

3.3.5 プラグマティクス

さてモンタギューそしてスコットは，時制や様相，命題態度や義務に関わる内包論理と関連するモデル，解釈，時点，可能世界のみならず，指示詞や人称代名詞をも含み，したがって使用脈絡 (context of use) にも関わるプラグマティクスをも組み込む包括的な内包論理 IL*を展開した．先述の指標 (indeces) や参照点 (points of reference) の i には，可能世界 w，時点 j，発話場所 p，発話者 a が含まれる $[i = (w, j, p, a, \ldots)]$．

かくてこうした包括的な内包論理 IL*の言語に対する解釈 σ は，全指標 i の集合 I，可能個体の集合 U，原始的表現に内包を付値する関数 F の三つ組 $\langle I, U, F\rangle$ である．表現 'a' の σ における内包 $\text{Int}_\sigma(a)$ は，指標 i と相対的に i における外延 $\text{Ext}_{\sigma,i}(a)$ を定める関数である（すなわち $\text{Int}_\sigma(a)(i) = \text{Ext}_{\sigma,i}(a)$）．たとえば 'now' の内包とは，任意の指標 i における当の時点 $\langle t\rangle$ を指定する関数である（すなわちどの $t \in T$ に関しても $\text{Int}_\sigma(\text{now})(i) = \langle t\rangle$）．

しかし分節されているとはいえ，各指標が並列されていることから，パラドクシカルな帰結が出る，というのがカプランの指摘である．文 p が論理的に妥当なのは，あらゆる指標で真な場合である．すると p が妥当なら，「必然的に p」「つねに p」も妥当である．しかし「私はいまここにいる」は，任意の指標 i に関して真だから妥当であるが，しかしそれが必然的かつつねに真であるとはいえないであろう．

3.4 デイヴィドソンの意味理論瞥見

ここでデイヴィドソンの意味理論の一端にだけ言及しておこう（詳細は[Davidson 1979; 野本 1988; 1997; 飯田 2000] 参照）.

タルスキは先の (T) 文中の p には，x がその名前であるような対象言語中の文 s のメタ言語中の同義的な翻訳文を代入することによって，「同値テーゼ」的に真理概念を定義していた．しかし意味理論を構築しようとすると，翻訳・同義性といったすでに「意味概念」を前提としているこの「同値テーゼ」的真理論をそのまま利用することはできない．そこでデイヴィドソンは，この順序を逆転し，「真理概念」の暗黙の理解を前提に，「真である」を原初的述語とみなすことにより，対象言語の文 s の意味を確定するような理論を構成しようとする．つまり s の真理条件を表し，s の翻訳となるような文 p をメタ言語中に見出すことにより，s の意味を確定しようとする．

デイヴィドソンの狙いは，自然言語の意味理論を構成することである．嘘つきのパラドクスに関しては，自然言語中の無矛盾な断片でよいとする．むしろ問題は，自然言語の文は，時制や発話の脈絡によって，真偽が変動するという指標性 (indexicality) を示すことである．そこで「真理」は，文の性質ではなく，文と発話者 a，発話時点 t との 3 項関係 $T(S, a, t)$ とみなされる．かくして自然言語に関する (T) 文は，たとえばつぎのようになろう．

(T)* ‘I am tired’ が a によって t において発話された場合に真なのは，a が t において疲れているときそのときに限る．

デイヴィドソンは，(T)*が，t における a の発話 ‘I am tired’ の「意味」を示していると考える．

だが ＜ a が t において疲れている ＞ は，‘I am tired’ の単なる翻訳ではありえず，この文が a により t において発話された場合の真理条件を「上からメタ的に記述」し直したものであろう．また (T)*は相対化された真理概念を用い，時制や指標性を支配する有限個の意味論的公理から導かれる定理とみることができよう．もしそうなら，それは後述のカプランの「直示語の意味

論」に通底しよう．

3.5 様相とモデル

3.5.1 カプラン・モデル

カルナップ·チャーチ以後，たとえばヒンティカはカルナップの「状態記述」という準意味論的な道具立てで，相対化された多様な様相論理系の意味論を与えているが，その一端は「知・信の論理」でみることにしよう [野本 1988].

カプランはその博士論文「内包論理の基礎」[Kaplan 1964] において，フレーゲの間接的文脈の着想を継承，チャーチの形式言語を修正しつつ，タルスキ流のモデル論的枠組み中で，カルナップの様相解釈を発展させ，S5 様相述語論理の完全性と決定可能性を証明した．

カプランは，様相子をメタ的な意味論的述語と解する直接話法的アプローチを採用し，フレーゲ·チャーチを継承して，様相文脈において表現は，① 他の表現を指す（統語論的解釈）と，② その意義を指す（内包的解釈）とを，並行的に展開する．カプランは，カルナップの座標言語での位置指定の考えを一般化して，対象言語中のすべての名前や文は，メタ言語中にそれぞれ一つの「標準名」をもつと考える．統語論的解釈では，標準名は引用符名や連鎖，内包的解釈では名前の表現する意義・個体概念の標準名，文の表現する命題の標準名である．また内包は可能的事態から外延（個体，個体のクラス，真理値）への関数（個体概念，特性，命題）である．可能的事態は，対象言語のモデル $m = \langle D, \phi \rangle$（$D$ は個体領域，ϕ は付値関数）と同一視される．S5 で「命題 p は必然的である」が現実世界 m で真なのは，すべての可能世界において p が真となる場合である．

「内部量化」[Kaplan 1969] でも同様に，フレーゲ流の二つのメタ言語的方法，つまり①「直接話法」的方法と，②「間接話法」的方法を区別し，存在論的に安全な①が採用される．

(1) 9 が 5 より大きいのは必然だ．

という言表様相の量化はクワインの準引用「$\ulcorner \cdots \urcorner$」を使うと，つぎのようになる．

(1d)　$\exists\alpha(\ulcorner \alpha > 5 \urcorner$ は必然的だ).

事象様相の量化には，チャーチ流の表示述語 ‘Δ’ を導入し，つぎのように表記する．

(1r)　$\exists\alpha(\Delta(\alpha, 9) \wedge \ulcorner \alpha > 5 \urcorner$ は必然的だ).

しかしいつでも (1d) から (1r) へ移出可能 (exportable) であるわけではない．その対象を必然的に表示する (Δ_N) 標準名 α のみが，移出可能なのである．

(1r)*　$\exists\alpha(\ \Delta_N\ (\alpha, 9) \wedge \ulcorner \alpha > 5 \urcorner$ は必然的である).

3.5.2　様相論理のクリプキ・モデル

クリプキは 1959 年以来，いくつかの論文で多様な様相論理体系の完全性を，簡明なモデル論によって証明した [Kripke 1959; 1963; 野本 1988; 飯田 1995].

(1) 様相命題論理のモデル

まずモデル構造 $\langle G, K, R\rangle$ の順序三つ組が導入される．K はある集合，G は K の成員，R は K における反射性をもつ関係である．このモデル構造の直観的な様相的解釈では，K はすべての可能世界 H の集合，G は現実世界，R は可能世界間の「相対的可能性」（代替関係や接近可能性ともいわれる）である．H_1RH_2 は，H_1 で可能な命題は H_2 で成立することを表す．このモデル構造は，体系 M のモデル構造であり，R が推移的ならば S4（直観主義論理はこれに埋め込み可能）の，また R が同値関係なら S5（古典論理はこれに埋め込み可能）の，各モデル構造である．さらに各可能世界 H と相対的に，表現につぎのように値を付値する付値関数 ϕ を導入すると，$\langle G, K, R, \phi\rangle$ が命題様相論理のクリプキ・モデルといわれる．‘A’ が文なら H と相対的に真理値を付値する（$\phi(A, H) = \mathrm{T}$ または F）．複文の真理値は，つぎのように

帰納的に定義される．

(i) $\phi(A \wedge B,\ H) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow \phi(A, H) = \mathrm{T}$ かつ $\phi(B, H) = \mathrm{T}$.

(ii) $\phi(\neg\ A,\ H) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow \phi(A, H) = \mathrm{F}$.

(iii) $\phi(\Box A, H) \Longleftrightarrow \forall H' \in K[HRH' \to \phi(A, H') = \mathrm{T}]$.

(iii) は，直観的には，「A は必然的である」が H で真なのは，H と相対的に可能なすべての世界 H' において真だということである．

(2) 様相述語論理のモデル

① 量化に関するクリプキ・モデルの特徴は，束縛変項の変域を各可能世界 H に相対化することである．そのために領域関数 ψ を導入し，各世界 H の個体領域を $\psi(H)$ に限定する．かくて様相述語論理のクリプキ・モデルは，$\langle G, K, R, \psi, \phi \rangle$ である．

② また述語 'P' への付値も各世界 H に相対化し，'P' には $\psi(H)$ 中で 'P' を満足する個体の集合が付値される ($\phi(P, H) \subseteq \psi(H)$).

③ では開放文 'Px' への付値はどうか．クリプキは自由変項と束縛変項との付値を区別する．束縛変項は各世界 H の個体領域 $\psi(H)$ 中の個体に制限される．かくして，

(iv) $\phi(\forall x Px, H) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \psi(H)$ についても，$\phi(Px, H) = \mathrm{T}$.

④ しかし自由変項への付値は，各世界 H に制限されない．各世界の個体領域 $\psi(H)$ の合併を $\cup_{H \in K}\psi(H) = U$ とすると，自由変項 'x' への付値は，U 中の個体でよい．つまり H に存在していなくてもよい．しかしながら，開放文 'Px' が H において真になるには，自由変項 'x' に付値される U 中の個体 a が，H における述語 'P' の外延の成員でなければならない．かくて，

(v) $\phi(Px, H) = \mathrm{T} \Longleftrightarrow$ 任意の $a \in U$ についても，$a \in \phi(P, H) \subseteq \psi(H)$.

したがって，もし a が H に存在しない場合には，a が他の世界で P であっても，H においては，'Px' は a に関しては偽になる．

⑤ またクリプキは，自由変項への付値に関しては，フレーゲ以来の標準論理での付値の仕方——つまり自由変項 'x' に値 a が付値されたら，同一文脈では，その付値を変更しない——を，様相論理でも踏襲する．つまり，いったん現実世界 G で 'x' に a が付値されたら，a は U 中に含まれるから，他の

世界 H において‘Px’が値踏みされようと，‘x’には同一個体 a が貫世界的に (transworldly)，固定的に (rigid)，付値され続ける．これが言語哲学的に大いに話題を呼ぶに至る「固定指示子 (rigid designator)」の原型である．

しかしこうした付値の仕方では，様相的な代入則，量化法則などはいずれも妥当にならない．たとえば‘$x = y \to (\Box x = y)$’も‘$\forall x \Box Px \to \Box Py$’も反証可能である．

⑥ この事態に対して論理学者としてのクリプキは，「一般性解釈」を採った．つまりこれも標準論理の対処に沿うもので，「自由変項を含む開放文の妥当性は，その普遍閉包の妥当性に依存する」という方策である，つまりは，代入則や普遍例化はつぎのような普遍閉包の省略とみなすのである．

(vi-1) $\forall y(\forall x \Box Px \to Py)$.

(vi-2) $\forall x \forall y(x = y \to \Box(x = y))$.

(3) 直観主義のクリプキ・モデル

様相論理 S4 と同様である．ただその直観的解釈はつぎのようになるだけである．命題論理のモデル $\langle G, K, R, \phi \rangle$ の直観的解釈によると，K は，われわれが多様な情報をもちうる時点ないし証拠状況 H のクラス ($H \in K, G$ は現在の証拠状況 $(G \in K)$) を表す．関係 R は反射性と推移性をもち，HRH' は H の後続時点 H' においてわれわれが H におけるのと同等以上の情報をもつことを表す．すると直観主義的な検証規約 (I) はつぎのようになろう．

(I) (i) 文‘A’が時点 H において検証されるのは，われわれが‘A’を証明するに足る情報を H において所有しているときそのときに限る．

(ii) 文‘A’が H において検証されないのは，H においては‘A’を証明するのに十分な情報をいまだ所有していないが，‘A’は後続状況 H' において確立されるかもしれない場合である．

(iii) すでに H において‘A’の証明をもてば，どの H' においても，‘A’を証明済みとして受容してよい．

(I) により，複文の検証条件が再帰的に定義される．排中律は検証可能ではない．‘$\neg A$’が H において検証されるには，‘A’が H において検証されていないのみならず，いかなる後続状況 H' においても検証されないということ

を，H において知らなければならないからである．

述語論理のモデルは，領域関数 ψ とある制限された個体のクラス U を加えた $\langle G, K, R, \psi, U, \phi \rangle$ である．個体領域は $\psi(H)$ として，また量化，述語の外延も，証拠状況 H に相対化されるが，U は $\psi(H)$ の合併である．

第4章
指示と信念

4.1　知信の論理

「宵の明星＝宵の明星」と「宵の明星＝明けの明星」はともに真なのに，両者の認識価値に相違がある（後者のみわれわれの知識を拡張しうる）という事態を，フレーゲは，「宵の明星」と「明けの明星」の意義の差異によって説明した．意義には，指示対象の「与えられる仕方」「確定法」が含まれる．彼はまた，上記のような文の一方は信じても，他方は信じないという命題的態度に差異のありうること，つまり代入則の成り立たないようにみえる文脈のあることに気づいた．こうした事態は，信念や知識などの命題態度報告，直接話法，間接話法に生ずる．こうしたパズルの解決策を，フレーゲは各単称名が異なる意義をもつことに求めた．カルナップは信念報告の交換可能な従属節は，単に内包が等しいのみならず，等しい内包が同じ仕方で形成されているべしという，内包的構造の同一性，内包的同型性に求めていた．

だがフレーゲやカルナップのとり上げた問題は，いわゆる言表についての (de dicto) 信念であるが，クワインが指摘する事象についての (de re) 信念やそうした文脈内部への量化 (quantifying in) の問題にはどう対処すべきか．

クワイン以降，知・信の論理と意味論に画期をもたらしたのは，ヒンティカとカプランである．ヒンティカ [Hintikka 1962] が提示する知の論理は，「a

は p と知っている」を ‘Kap’ と表記すると，ルイスの S4 に見合う論理体系である．

(K1) $\vdash$ Ka$p \rightarrow p$; (K2) $\vdash$ Ka$(p \rightarrow q) \rightarrow$ (Ka$p \rightarrow$ Kaq);
(K3) $\vdash$ Ka$p \rightarrow$ Ka(Kap).
(R1) A，$A \rightarrow B/B$; (R2) $\vdash p$ / $\vdash$ Kap.

ヒンティカの知の観念は，各人が自らの知の帰結をすべて知っているような論理的全知である．ヒンティカは，（こうした論理的全知者の住む可能世界の部分的記述としての）モデル集合 μ といった準意味論的方策を用いて，意味論を与えようとする [野本 1988, 6 章] ．

たとえば (K1) に見合うのは，「a が μ で ‘p’ と知っていれば (Ka$p \in \mu$), ‘p’ は現実に μ で真である ($p \in \mu$)」．

他方信の論理は義務 (deontic) 論理 D-S4 に見合う体系で，つぎの (B2), (B3) の公理は成立するが，(K1) に相当する公理は不成立である．

(B2) $\vdash$ Ba$(p \rightarrow q) \rightarrow$ (Ba$p \rightarrow$ Baq); (B3) $\vdash$ Ba$p \rightarrow$ Ba(Bap).

こうした「知・信の論理」では，代入則と量化法則が一般的には成立しないことをヒンティカも認める．その理由を彼は，単称名辞が異なる事態で異なる対象を指しうるという多重指示性 (multiple referentiality) に求めている．

カプラン [Kaplan 1969] は，フレーゲ・チャーチ的な意味論的述語「$\Delta(\alpha, x)$」(「表現 α は x を表示する」) を導入して，つぎのような事象的 (de re) 信念を表記しようとする．

(1)　角を曲がった男について，ラルフは彼がスパイだと信じる．
(1r)　$\exists\alpha$[Δ(α，角を曲がった男) $\wedge$ ラルフは「α がスパイだ⌉ と信じる].

しかし (1) ないし (1r) だけから，つぎのような特定人物についての量化文へとつねに移出可能 (exportable) とはいえない．

(2) スパイだとラルフの信じている人物がいる．

たとえばつぎのような文から (2) へは移出できないからである．

(1)* ラルフは「一番背の低いスパイはスパイだ」と信じている.

カプランは，様相文脈での移出可能な名前を「標準名」に制限したように，信念文脈でも移出可能な名前を制限する「名前の画像理論」を提案する．画像と類比的に，名前には，(i) それが何を表示するかを限定する記述内容，(ii) その名前がどの対象 x の (*ofness*) 名前かを限定する生成的 (genetic) 性格，(iii) 鮮明 (vivid) であること，という三つの因子が認められる．移出可能な名前 α は，対象 x とラルフとの間に，この 3 条件を満たす「代表関係 (representation)」($R(\alpha, x$，ラルフ$)$) が存在せねばならない．この場合に，(1) から (2) への移出が，つぎのような表記によって可能になる．

(1R)　$\exists\alpha[R(\alpha$，角を曲がった男，ラルフ$) \wedge$ ラルフは「α はスパイだ˥ と信じる$]$

(2R)　$\exists y \exists\alpha[R(\alpha$，$y$，ラルフ$) \wedge$ ラルフは「α はスパイだ˥ と信じる$]$

ヒンティカもその後の論争を通じ，「命題的態度に関する意味論」[Hintikka 1969] に練り上げる．ある所与の世界 μ_0 で，ある命題的態度を人物アリスに帰属させるということは，可能世界の集合 Ω を二つに類別すること，つまり，代替関係 Φ_B を導入し，μ_0 の代替 Φ_B（アリス，μ_0）（μ_0 におけるアリスの命題的態度と両立可能なすべての世界）の集合に結びつけることである．すると，

(TB)「アリスが p と信じている (Bap)」が，ある世界 μ_0 で真なのは，p が μ_0 の代替世界 $\Phi_B(a,\mu_0)$ のすべてにおいて真の場合である．

さて無条件の代入則や内部量化への移出が可能でない理由を，ヒンティカは単称名辞の多重指示性に求めた．そこでヒンティカの立場からは，代入則や量化法則の回復には，貫世界での個体の交差同定 (cross-identification) が必要である．そこでフレーゲの意義やカルナップの個体概念をさらに限定し，各可能世界と相対的にただ一つの個体を抜き出す個体化関数 (individuating function) **f** を導入する．**f** は各可能世界で指示対象を個体化する仕方を含む．代入則の回復には，二つの単称名辞 ‘a’, ‘b’ が現実世界 μ_0 で同一対象を

指示していれば，すべての代替世界 λ においても $\mathbf{f}a(\lambda)=\mathbf{f}b(\lambda)$ を要求することである．他方，量化法則の回復には，個体化関数 $\mathbf{f}$ が現実世界 μ_0 で指定した個体を，どの代替世界 λ でも指定するような $\mathbf{f}$ の存在要請が必要である $(\mathbf{f}(\mu_0)=\mathbf{f}(\lambda))$（詳細は [野本 1988, 6 章]）．

さてしかし，ヒンティカの多重指示という考えは，基本的に確定記述を単称名のパラダイムに採る考え方であり，カプランの代表関係による制限も，やはりフレーゲ的な広義の固有名・単称名辞観に根ざしたうえでの対処であった．しかしカプランの標準名や，名前の生成的性格の要求，またクリプキの自由変項への付値が各可能世界の個体領域の合併 U 中で一意的に定まっているという着想は，やがて単称名辞の意味論に関して，確定記述から截然と区別されるべき「固定指示 (rigid designation)」の方向を指し示す．「固定指示子」は，いかなる世界でも，同じ個体を指定し続ける単称名辞なのである．

4.2 直接指示－単称名辞の意味論

4.2.1 付箋と記述

カルナップ以降，早期にマーカスが 1940 年代後半から，“Modalities and Intensional Languages” [Marcus 1961.12] までに展開した様相述語論理に対し，クワインはさまざまな批判を展開した．すでに A. スマリヤンが，ラッセル流に論理的固有名と確定記述の区別，作用域の区別により，クワインの批判に対し統語論的反論を提出していた [野本 1988, 4 章 2-2]．マーカスも，上記の論文中で，付箋を貼る (tagging) ことと記述すること，固有名と記述を区別し，同定用の付箋 (identifying tag) としての固有名はいかなる意味ももたず，固有名同士はどの文脈でも相互代入可能であると主張した [Marcus 1993, pp.10–12]．1962 年 2 月のハーバードでのマーカスの講演後の討論中でも，付箋としての固有名を記述と対比し，出席していたクリプキもそれに言及している [Marcus 1993, pp.33–34]．もっともフェレスダールによれば，1960–61 年当時のクリプキは，重積様相の意味論に関心があり，クリプキ自身も日常

語の固有名が「固定指示子」だと気づくのは1963–64年の仕事を通じてだと語っている [Kripke 1979, pp.3, 5].

「純粋指示 (genuine reference)」というアイディア（しかし博士論文自体には，この表現は登場しない）を，最も早期に打ち出したのはフェレスダールのハーバード博士論文（1961年4月3日受理）[Føllesdal 2004] だと，フェレスダールは自負する．彼によれば，その論文での彼の基本的アイディアは，(1) 名指し，(2) 同一性などで [Føllesdal 2004, Introduction, p.ix]，(1) に関して，様相文脈での代入則や量化法則に関するクワインの議論を遁れるには，フレーゲ・カルナップ的な単領域的 (one-sorted) 意味論を放棄し，2領域的意味論を採用すべきだという．つまり，一般名辞や文とは意味論的に根本的に異なり，名前は「あらゆる可能世界」においてその指示を維持すると主張し，また (2) 名前間の同一性は，必然的に普遍代入可能とみなした．

しかしフェレスダールが，[Føllesdal 2004, Introduction] で「純粋単称名辞 (genuine singular terms)」と称している名辞についての，博士論文自体での明示的定義は，「解決にもたらすのは，ある語が，一個同一の対象をすべての可能世界で指示する場合にのみ，その対象の固有名とみなすということによる」という箇所のみである（[Føllesdal 2004, p.75]．オリジナルは [1961, §17] にある）．これは確かに，クリプキの1970年の「固定指示子」の定義と正確に同じである．また量化の変項，代名詞が，純粋単称名辞の原型だということも [Føllesdal 2004, Introduction, p.xiii, §§ 11ff.]，元の博士論文ではそれほど明示的ではない．

4.2.2　固定指示

以上のような先行事情があるにせよ，内包述語論理の代入則や量化法則に関わる，とくにクワインが指摘した諸困難をどう回避するかを巡って，第一級の論理学者たちが模索を重ねてきたが，その困難の根が，まさにフレーゲ・ラッセル・ウィトゲンシュタインという20世紀言語哲学の，単称名辞の正統的意味論にあることを，説得的に剔抉（てっけつ）してみせたのは，やはりクリプキのプリンストン講義「名指しと必然性」([Kripke 1970]) であろう．（やや先行してドネランは，確定記述にはラッセル流の「帰属的使用」以外に，記述を

充足しなくとも指示対象を指定しうる「指示的使用」があることを指摘していた [Donnellan 1966])．

クリプキは，フレーゲ・ラッセル・ウィトゲンシュタインらの固有名の意味論を，要するに記述（の束）が名前の意義を与える，ないしは記述（の束）が指示対象を指定するという「記述説」として一括し，そうした記述は名前と同義ではないし，またその対象指示の必要条件でも十分条件でもないと批判する．クリプキならびにパトナム [Putnam 1973] はまた，「水」「虎」「ブナ」のような「自然種名」についても，標準的特徴記述（ステレオタイプ）が自然種名の内包外延を確定しないと論ずる．クリプキ，パトナム，ドネランらは，固有名・自然種名の意味論を理論として練り上げることはせず，もっぱらフレーゲ・ラッセル説の代替となるべき，よりよい描像 (better picture) を提出すればそれでよしとする．彼らの描像は，指示対象ないしは種の事例的サンプルの目撃状況での指定には記述やステレオタイプは有用でありうるが，肝心なのは記述やステレオタイプの充足ではなくて，当の対象ないし範型的事例に直面することであり，一方，伝聞状況や間接的な語習得においては，各人の信念・情報ではなく，ある言語共同体における名前伝達の（歴史社会的な）連鎖が重要なのだと主張される（くわしくは [野本 1988, 5 章])．

4.2.3　直接指示

さらにほぼ同時期の 1970 年代初頭から，カプランもまた指示詞や代名詞・副詞に記述的意義を補って指示対象を確定するというフレーゲ的な意味論の批判に転じた．フレーゲは，たとえば「私」「いま」「今日」のような指標詞 (indexicals) や指示詞の意味・指示対象が発話文脈に依存することを認めるが，それらの表現と脈絡だけでは対象指定のできない不完全な表現であり，各話者の確定法を，たとえば記述によって，あるいは（指示詞の場合）指差しなどによる補足が必要であるとみなした．こうした補足は，フレーゲ的な意義を表し，その意義によって意味＝指示対象が確定されると考えた [野本 1986, 第 7 章]．カプランは指標詞が（フレーゲ的意義なしに）その意味規則と使用脈絡のみで，直接に指示対象を確定しうるとみなし，「直接指示 (direct reference) の意味論」を練り上げる．以下，簡単にカプランの「直示語の論

理 (Logic of Demonstratives: LD)」[Kaplan 1989]（ただし，すでに 1977 年からその手稿コピーが世界中に流布した．その形式意味論的体系はすでに 1971 年夏に公表）を紹介しておこう（くわしくは [Kaplan 1989; 野本 1988, 第 5 章]）.

LD は様相・時制ならびにいくつかの指標的表現を含む包括的な内包論理の意味論的体系である．

(1) LD の統語論

原始述語は「現存する (Exist)」「位置する (Located)」，様相子「可能◇」「必然 □」，時制子「未来 F」「過去 P」「前日 G」，直示語（指標的表現）は，副詞「いま N」「現実に A」「昨日 Y」，指示詞「あれ dthat（直示的に使用された that)」，指標詞「私 I」「ここ Here」である．

(2) LD の意味論

LD のモデル構造は $\sigma = \langle C, W, U, P, T, I \rangle$ で表される．C は使用脈絡 c の，W は可能世界 w の，U はすべての個体 i の，P, T は（全世界共通の）位置 p と時点 t との，空でない集合．I は述語・副詞に内包を付値する関数．脈絡 c は，使用者 c_A，使用時点 c_T，使用位置 c_P，使用世界 c_W に分節される．

(a) まず様相論理 (S5) 中の「必然的に ϕ」が σ で（$cftw$ に関し）真なのは，すべての可能世界 w' で 'ϕ' が（$cftw'$ に関し）真の場合である（$\vDash^{\sigma}_{cftw} \Box\phi \iff \forall w' \in W \vDash^{\sigma}_{cftw'} \phi$）[1)]．

(b) LD に固有の指示と真理の定義を，若干例示しよう（以下 σ は省略）．

(i) 脈絡 c において「いま ϕ」が真なのは，使用時点 c_T で 'ϕ' が真の場合である ($\vDash_{cftw} N\phi \iff \vDash_{cfc_T w} \phi$).

(ii) 脈絡 c において「現実に ϕ」が真なのは，使用世界 c_W において 'ϕ' が真の場合である ($\vDash_{cftw} \mathrm{A}\phi \iff \vDash_{cftc_W} \phi$).

(iii) 脈絡 c における「あの α」の指示対象は，使用時点 c_T，使用世界 c_W における単称名辞ないし（指差しなどの）直示 'α' の指示対象である

1) f は tw と相対的に変項に個体を割り当てる付値関数．代替関係 wRw' は，S5 が念頭におかれているので，反射性，対称性，推移性を満たす同値関係．

($|\text{dthat } \alpha|_{cftw} = |\alpha|_{cfc_T c_W}$).

(iv) 脈絡 c における「私」の指示対象は，当該の発話者 c_A である ($|\text{ I }|_{cftw} = c_A$).

(c) LD 真理と LD 妥当：ある表現 ‘Γ’ の「意味性格 (character)」($\{\Gamma\}^{\sigma}_{f}$) と脈絡 c における「内容 (content)」($\{\Gamma\}^{\sigma}_{cf}$) は，関数論的にはつぎのように定義される．

(D1) ‘Γ’ の意味性格 $\{\Gamma\}_f$ とは，脈絡 c から c における ‘Γ’ の内容 $\{\Gamma\}_{cf}$ への関数である．

(D2) 文 ‘ϕ’ および単称名辞 ‘α’ の脈絡 c における内容は，それぞれ tw から真理値および指示対象への関数である ($\models_{cftw} \phi$ は，$\{\phi\}_{cf}(tw) =$ Truth と，また $|\alpha|_{cftw} = \{\alpha\}_{cf}\ (tw)$ と表される)．

かくて脈絡 c における LD 真理 ($\models_c \phi$) は，$\forall f[\{\phi\}_{cf}\ (c_T, c_W) = \text{Truth}]$. また LD 妥当（$\models_{\text{LD}} \phi$）は，$\forall \sigma, f, c\{\phi\}^{\sigma}_{cf}\ (c_T, c_W) = \text{Truth}$ と定義される．

たとえば「私はいまここにいる」は LD 妥当である ($\models_{\text{LD}}$ N(Located, I, Here))．しかし「私がいまここにいるのは必然である」は LD 妥当ではない（$\not\models_{\text{LD}} \Box$ N(Located, I, Here)）．

(3) 固有名

指標詞・指示詞は，使用脈絡 c に依存的で，その指示対象は c と相対的に変動しうる．しかしいったん c が定まると，その指示対象も c が変動しない限り，固定する．たとえば $c*$ において，「私」「いま」「ここ」は，$c*_A$, $c*_T$, $c*_P$ に確定してしまう．のみならず，いかなる時点や世界でも，$c*$ が変動しない限り，同じ $c*_A$, $c*_T$, $c*_P$ を指し続ける，クリプキのいう「固定性」を示す．かくしてカプランの示唆するつぎのような「脈絡指標 $c*$ つき定義 DK」[Kaplan 1989, p.551] を介して，指標詞・指示詞・確定記述を使用して固有名を導入することができるし，実際にわれわれは日常語でもそうしていると思われる．たとえば，

(DK) 札幌 $=_{c*}$ ここ；フォスフォルス $=_{c*}$ あれ [明けの明星を指差す]；

イエス $=_{c*}$ それ [マリヤの産んだ，飼葉桶の中の赤児を指差す].

かくして脈絡指定つきの指標詞・指示詞・指標的記述や固有名は，いかなる時点，世界においても確定した指示対象を一意的・固定的に指し続けるのである.

(4) 直接指示性

指示のフレーゲ・チャーチ・カルナップ的な描像は,「ある表現 α はその意義 β_1 を表現し」+「その意義 β_1 が意味・指示対象 β を指定する」=「α が β を意味する」という図式である．一方，カプランの「直接指示」の描像は,「表現 α がその言語的規則・意味性格と使用脈絡によって直接当の対象を指定する」というものである.

たとえば (*)「私は疲れている」が使用脈絡 c で話者 c_A によって使用されると，フレーゲでは話者 c_A について自身がもつ固有の情報・意義 s が補足された $\langle$ 私 $[s]$ + [疲れている] $\rangle$ という一般命題・思想が「内容」として表現されるが，カプランによると,「私」の意味性格と c によって，話者 c_A が直接指定され，文 (*) は c において,「内容」としてはラッセル的単称命題 $\langle c_A$ + (命題関数) [疲れている] $\rangle$ ないし付値 (valued) 文 $\langle c_A$ + (述語)「疲れている」$\rangle$ を表現する．要するに単称命題中には，フレーゲ的意義や意味性格は登場せず，話者 c_A という個体が直接現れているのである．指標詞・指示詞・固有名を含む単称文の真偽が，各時点や世界で値踏みされるのは，そうした文が使用された脈絡において指定済みの個体が直接登場している，ラッセル的単称命題なのである.

4.3 信念帰属の統語論的・意味論的考察

4.3.1 ノーマルな信念帰属

さてでは，どのような条件が満足されるならば，われわれは話し手に一定の信念を帰属しうるであろうか．フレーゲの指摘したように，典型的には「判

断」「主張」という言語行為が，信念帰属と密接な関連をもつ．彼の示唆によれば，ある文 ‘p’ の表現する思想の把握・理解（思考）を越えて，その思想を「真とみなすこと」，真理性を承認することが「判断」で，その表明が主張 ‘$\vdash p$’ である ([FB] 14, [G] 62)．そして，a の主張・同意 ‘$\vdash p$’ から，信念帰属「a は ‘p’ の表す思想 p_1 を信じている $[aB(p_1)]$」への標準的な移行は，クリプキに従えば [Kripke 1979]，たとえばつぎの同値式によって表される．

(A) 雪は白いとアリスが信じるのは，正常な英語の話し手アリスが反省の上誠実に ‘Snow is white’ に同意・主張するときそのときに限る．

だが (A) は，指標詞・指示詞が登場する場合を考えれば，引用除去と真理値保存的翻訳（「下からの表現 (expression from below)」）というより，一般的には，（カプランの区別 [Kaplan 1997] を借りれば）メタ言語による「上からの記述 (description from above)」と解したほうが適切だろう．

以上の予備的理解のもとで，信念帰属の統語論・意味論を考えよう．

フレーゲ以来，信念帰属に関してはさまざまなパズルが指摘されてきた．クリプキの固定指示論やカプランの直接指示論はこうした苦境を一層強化するようにみえる．こうしたパズルの典型は，ノーマルな信念帰属の手続きが，同一主体に対し矛盾する命題を信じさせたり，矛盾する信念態度を同時に帰属させるようにみえ，またクワイン指摘の「不透明性」が認められることである．ここでは問題をもっぱら「言表についての (*de dicto*) 信念帰属」，それも従属節に直接指示語の現れる最も問題的な文脈でのパズルに絞る．

第一は言表的信念帰属の標準的形式とその本質的な決定要因は何かという問題，第二は言表的信念に関するパズル解決の提案，第三は「不透明性」の問題である．

4.3.2 信念帰属の統語論的 – 意味論的分析

まず「a は p と信じる」という間接話法報告を，主体 a の（対象言語 L^* 中の）ある文への，a の同意・主張から導出可能な言表的信念帰属文の標準形と解する．

信念帰属においては，共通言語の公共的因子と個人的因子とを適切に見積

もる必要がある．今回はまたフレーゲ的思想や命題への言及をなるべく差し控え，信念文の表現していることを，メタ的な「上からの記述」により適切な仕方で表現し直すよう試みたい．しかし多くの場合，信念帰属の結果として，ある言語中での信念文だけが与えられていて，元来の発話主体がどの言語中のどの文に同意していたのかについて確定した情報が与えられていない．そこで与えられた信念帰属文をノーマルな信念帰属の結果とみなし，それから出発して，主体 a の言語 L^* 中のある文に対する a の元来の同意や否認へと遡及することにより，当の信念文の真理条件を確定するという戦略を採用したい．

すると主体 a に関する共通言語 L での言表的信念帰属報告に関する，（暫定的な）意味論的分析はつぎのようになる．

(B)「a は p と信じる」が言語 L において真 $\Longleftrightarrow \exists s[a$ は p と [脈絡 c において] 同一の真理条件をもつ（a の言語 L^* 中の）文 s に同意・主張する [‘$A(a, s)$’ と表記]（と解釈される)$]$.

「a は p とは信じない」は多義的である．しかし (B) 中の右辺に現れる否定の作用域によって明晰化可能である．

(i) 大作用域（信念不在 (failure of belief)）の場合：$\neg\exists s[A(a, s)]$（「a は p と同一の真理条件をもついかなる文 s にも同意しない.」）

(ii) 小作用域（判断留保 (suspension of belief)）の場合：$\exists s[\neg A(a, s)]$（「a は p と同一の真理条件をもつある文 s には同意しない.」）

ここではもっぱら難易度の高い (ii) の小作用域の判断の留保・差し控え，つまり主体 a は p と同一の真理条件を表すような文であっても，ある特定の文 s には同意しない場合を考える．

4.3.3 信念帰属のパズル

まず信念帰属の代表的なパズル，「合理的な主体 a が p_1 と信じながら，p_2 とは信じない」について統語論的－意味論的な回避策を考えよう．それはつぎのような説明を含む．

(i) 従属節 p_1, p_2 によって表現されている真理条件の差異 $[p_1 \neq p_2]$ によ

る真理条件的説明.

(ii) 主体 a によって同意または否認された元来の文 s_1, s_2（したがってその構成要素表現）の差異 $[s_1 \neq s_2]$ による統語論的 – 措辞的 (lexical) 説明.

(iii) 主体 a によって同意または否認された元来の文の，a による統語論的構造把握の差異 $[\sigma_1 \neq \sigma_2]$ による構造論的説明.

(iv) 元来の文 s_1, s_2（の構成要素表現）の言語的意味規則の差異 $[m_1 \neq m_2]$ による意味論的説明.

代表的な例をとり上げよう.

(i) 真理条件的説明：

(1) フォスフォルスは惑星である.

(2) 明けの明星 (the morning star) は惑星である.

直接指示説では，(1) の真理条件はつぎのようである.

(1T)「フォスフォルスは惑星である」が L において真なのは，フォスフォルスが惑星であるときそのときに限る.

ラッセルの記述理論では，(2) の真理条件はつぎのように与えられる.

(2T)「明けの明星は惑星である」が L において真なのは，明けの明星が唯一つ存在し，かつそれが惑星であるときそのときに限る.

ある主体 a が (2) は信じても (1) は信じないとしたら，それは (2) と (1) の真理条件が異なるからである．実際 (2) の真理条件，(2T) の右辺は複雑な多重量化を含む.

(ii) 統語論的説明：主体 a によって元来同意ないし否認された文および文中の語の統語論的 – 措辞的 (syntactical-lexical) 差異 $[s_1 \neq s_2]$ による（[Kaplan 1990] 参照）説明.

(3) ヘスペルスは惑星である.

直接指示説では，(1)(3) の表す真理条件は同一となるはずである．にもか

かわらず a が (1) に同意するが (3) には同意しないことがありうるが，(ii) はその場合の説明を与える．

またつぎはクリプキのパズルの一つである．フランス在住中の情報により，“Londres est jolie.” には同意するが，ロンドンの好ましからざる地域に移住したピエールは，“London is pretty.” には同意しないとする．かくしてつぎの信念帰属が得られる [Kripke 1979].

(4) ピエールはロンドンがきれいだと信じる．
(5) ピエールはロンドンがきれいだとは信じない．

しかし直接指示説では，先のフランス語文と英語文の真理条件は同一である．同様のことは同じ対象が異なる名前をもつ（「イスタンブール」と「コンスタンチノープル」）場合，また一つの名前に異形 (variant) がある場合（“London” と “Londres”, “Venetia” と “Venice”, “Venedig”）には，そうした統語論的－措辞的な差異が，a の個人言語 L^* の「話し手の統語論 (speaker's syntax)」では異なる対象に対する異なる名前と解されると，それが当の a の信念態度に不合理とはいえない違いをもたらしうる．

(iii) 構造論的説明：a が同意ないし否認した元来の文 s_1, s_2 の a によるその統語論的構造把握の仕方が異なる場合，真理条件が同一な文でもその統語論的構造 σ は異なりうる．

(6) a は，ヘスペルス＝ヘスペルスと信じるが，ヘスペルス＝フォスフォルスとは信じない．

直接指示説では，従属節の真理条件は同一だが，その統語論的構造（$[\lambda\xi\zeta R(\xi,\zeta)]$ と表記）は異なると解釈可能である．たとえば，前者の従属節を $[\lambda\xi(\xi=\xi)]h$（ξ に h を代入，つまり「h は自同的 $[\lambda\xi\ \text{Self-identical}(\xi)]h$」）と解した場合は，そうである．

この説明法が威力を発揮するのは，「反射性」に関するパズルの場合である．つぎの (7) は，「x は y より強い」と「x はそれ自身より強い」という関係の構造的差異によって説明が可能である．

(7) ロイスは，スーパーマンがクラーク・ケントより強いと信じているが，
スーパーマンがスーパーマンより強いとは信じていない．

後者の従属節は，[$\lambda\xi$ Self-$R(\xi)$] という反射的構造を表すと解釈可能だからである．

構造明示化の説明法は，チャーチ [Church 1982] のパラドクスにも援護射撃を与える．チャーチによれば，信念文への内部量化が許されるなら，「同一者不可識別の原理」に基づくつぎの論理法則が成立しなければならない．

(8) すべての x, y について，$x \neq x$ であるとジョージ 4 世が信じない場合，
もしジョージ 4 世が $x \neq y$ と信じれば，$x \neq y$.

だがチャーチは次式がきわめて確からしいとみなす．

(9) どの x についても，ジョージ 4 世は $x \neq x$ とは信じない．

すると「信じればそうなる」というジョージ 4 世の信念の驚くべき万能性を表すつぎのような式が導かれる．

(10) どの x, y についても，もしジョージ 4 世が $x \neq y$ と信じれば，$x \neq y$.

だが (9) は，チャーチのいうようにつねに真であろうか．普遍例化によって (9) から任意の名前 'a' について (9*) が導かれる．

(9*) ジョージ 4 世は $a \neq a$ とは信じない．

しかし '$a \neq a$' は多義的であって，われわれの分析法では，ジョージ 4 世の個人言語での '$a \neq a$' の構造理解は，複数の分析を許す（[野本 1997, p.326] 参照）．

さてジョージ 4 世が，いかなる対象にも述語づけ不可能な反射的構造 [$\lambda\xi(\xi \neq \xi)$] をもつ「非自同性」ではなく，たとえば [$\lambda\xi\zeta(\xi \neq \zeta)$] という構造に，$a$ が別人の別名だと勘違いした「スコット」を代入したのだと考えてみよう．その場合つぎは真でありうる．

(9I) ジョージ4世は，スコットがスコットと異なると信じる.

これは先の (9*) の反証例であり，(9I) から存在汎化によって次式が得られる.

($9^{\#}$) ジョージ4世が $x \neq x$ と信じるような x が存在する.

($9^{\#}$) は (9) の否定であるから，(9) は偽になりうるのであり，よって必ずしも自動的に (10) が真となるとはいえず，ジョージ4世に超能力があるわけではない（[Salmon 1986] に一見類似の議論があるが，直接の意見交換 [1991] により，個人言語中の構造理解の差異に訴える私の分析とは異なることを確認しあった).

ところで，上記の (ii), (iii) のような統語論的説明は，強い説得力をもつと考えられるが，信念の帰属が思考・認識，欲求などの帰属同様，典型的に心的な態度に関わり，そうした心的態度のいわゆる「内容」の「理解」と深く関連する以上，やはりそうした信念帰属の意味論的関わりを無視するべきではない. (i) の真理条件に訴える説明法は意味論的説明であり，また (ii) の統語論的－措辞的差異による説明や (iii) の統語論的な構造的差異による説明もまた，いわゆる信念内容の「理解」に不可欠の要因である. しかしながら統語論的差異のみによって同意・不同意の説明を終結させることは，サールのいう「中国語の部屋」のパズル，つまり，コンピュータが中国語の文を，単に翻訳マニュアルのみに頼って，別の言語中の文に翻訳できたとしても，そのコンピュータがその文の内容を理解したといえるのかという問題，と同様の疑念を引き起こしうる.

フレーゲによれば，記号表現の差異には，その「意義」の差異が反映されており，それには指示対象の「与えられ方」「確定法」といった認知的なアスペクトが含まれる. そこで以下では，統語論的差異に含意される，信念内容の「理解」に関わる意味論的－認知的アスペクトも配慮して，準フレーゲ的な付加的説明を補足しよう.

(iv) 意味論的規則による説明：発話主体が同意ないし否認した文中の語の言語的意味（意味論的規則）m の意味論的差異による付加的説明. 典型的には，

指標詞「私」「いま」や指示詞「あれ」「彼」を含む発話の場合である．

(11) 私は怪我をしている．

(12) 彼［ラウベンは鏡に映っている自分をそうとは気づかずに指差す］は怪我をしている．

これらの真理条件の「上からの記述」は，つぎのようになろう．

(11T)「私は怪我をしている」が発話脈絡 c において真なのは，当の発話主体 c_A は怪我をしているときそのときに限る．

(12T)「彼［ラウベンは鏡に映っている自分をそうとは気づかずに指差す］は怪我をしている」が c において真なのは，指差されたその当人が怪我をしているときそのときに限る．

いま (11)(12) を脈絡 c で発話したのがラウベンだとすると，直接指示説では c においては発話者 c_A＝彼［指差された男］＝ラウベンであるから，(11)(12) の真理条件は同一となる．

にもかかわらずラウベンは，まだ麻酔から完全には醒めておらず，(12) には同意しても，(11) には同意しないことがありうる．つまり，

(13) ラウベンは，彼［ラウベンは鏡に映っている自分をそうとは気づかずに指差す］が怪我をしていると信じるが，自分自身が怪我をしているとは信じない．

するとこの場合には，直接指示説では真理条件的に説明はできない．また (11)(12) は統語論的構造は同一だから，構造把握に訴えることもできない．しかし信念帰属が遡及されうる，ラウベンによって同意ないし否認された元来の文中の，指示詞「彼」と指標詞「私」とは明らかに統語論的－措辞的に異なる語であり，その言語的意味（意味論的規則）もまたはっきり異なっている．

先述のカプランの「直示語の論理」によれば，「私」「いま」「ここ」のような指標詞，「あれ」のような指示詞の意味論的規則（「意味性格」）は，以下のように互いに異なる．

(a) | 私 $|c = c_A$，(b) | いま $|c = c_T$，(c) | ここ $|c = c_P$，

(d) | あれ [d]$|c = |d|c$（d は指差しや記述）.

信念帰属のパズルはさらに，(v) L^* の言語共同体において各 s_1, s_2 中の名前に結びつく対象指定法に公共的な差異があるか $[d_1 \neq d_2]$，(vi) または（たとえ s_1, s_2 が同じ文でも，または L^* の言語共同体においては s_1, s_2 中の名前の対象指定法に公共的レベルでなんら差異がなくても）主体 a の個人言語中での s_1, s_2 中の名前の個人的理解の仕方（話し手の意義 (speaker's sense)）において差異がある $[i_1 \neq i_2]$ か，によって補足的説明が与えられる．信念のパズルの理由ないし根拠は，以上のすべてが相補的に重複してもよい．

(vi) のいわば個人言語における主体の個人的な名前の理解の仕方は，クリプキの指摘した「パデレウスキ」の例がこれに相当する．

(14) ペーターは，パデレウスキ [ピアニストとしての] が音楽的才能をもつと信じるが，パデレウスキ [政治家としての] が音楽的才能をもつとは信じない．

ペーターが政治家と音楽家とは両立しないという強固な信念をもち，「パデレウスキ」という名前の彼にとっての理解の仕方が，< 政治家 > と < ピアニスト > というように，二つの状況下であまりにかけ離れていて，それらの指示対象が同一人物であるとは認知できなかったのである．

かくして 4.3.2 項の，信念文についての意味論的分析 (B) は，とくに p 中に直接指示語が登場する場合，信念帰属の説明としては必ずしも十分ではない．信念の決定因子には，中核的因子としての上記の p, s の真理条件のみならず，本節でくわしく説明されたように，（共通言語上，ならびに個人言語上の）統語論的－措辞的特性，統語論的構造 σ，またそれに随伴する意味論的規則 m，また偶因的要因とはいえ L^* の言語共同体において，s に結合されている対象の公共的指定法の表現 d，さらに話し手 a による s の個人的理解の仕方（の表現）i が含まれ，それらはつぎのような一連の制約条件 "$C(p, s, \sigma, m, d, i)$" の下におかれる．

(a) L 中の p は，L^* 中の（使用脈絡 c における）s と同じ真理条件をもつ．

(b) s の構成要素表現は（共通ないし個人言語中で）固有の統語論的－措辞的特性をもつ.

(c) s は一定の統語論的構造 σ をもつ.

(d) s は（(b) に随伴する）一定の意味論的規則 m をもつ.

(e) s 中の名前には L^* において共通の対象指定法（の表現）d が結合されうる.

(f) 主体 a は s 中の名前に個人的な対象指定法（の表現）i を結合しうる.

すると (B) はつぎのように改訂されるべきであろう.

(B*)「a は p と信じる」が L において真 $\Longleftrightarrow \exists s \exists \sigma \exists m \exists d \exists i$ [制約 $C(p, s, \sigma, m, d, i)$ の下において，a は L^* 中の文 s に（使用脈絡 c において）同意する $[C(p, s, \sigma, m, d, i) \wedge A_c(a, s, L^*)]$].

かくして，信念に関するパズル解決のための必要条件，つまり合理的主体が同値な従属節の表す内容を，同時に信じかつ信じないということが両立可能であるための必要条件は，信念の主要な決定因子間におけるつぎのような差異の選言として表されうる.

(C)「a は p_1 と信じる」と「a は p_2 とは信じない」とが L 中で同時に真 $\Longleftrightarrow \exists s_1 \exists s_2 \exists \sigma_1 \exists \sigma_2 \exists m_1 \exists m_2 \exists d_1 \exists d_2 \exists i_1 \exists i_2$ [[a は制約 $C(p_1, s_1, \sigma_1, m_1, d_1, i_1)$ の下で文 s_1 に同意するが，a は制約 $C(p_2, s_2, \sigma_2, m_2, d_2, i_2)$ の下で文 s_2 には同意しない] $\rightarrow [p_1 \neq p_2 \vee s_1 \neq s_2 \vee \sigma_1 \neq \sigma_2 \vee m_1 \neq m_2 \vee d_1 \neq d_2 \vee i_1 \neq i_2$]].

こうした制約が，信念に関するさまざまなパズルの解決を与えうると考える.

4.3.4 透明性 (transparency) の問題 —— 合成性とシェイクスピア性

最後にとり上げたいのは，フレーゲが指摘しクワインが「指示の不透明性」（代入則を満足しない）と称した問題である．しかしこの「不透明性」の問題も，「合成性」（従属節中の構成要素表現の < 意味論的指示 > が信念文全体の真理値を確定する）の不成立を意味するのか，それともむしろとくに名前の統語論的－措辞的な差異に関わる（ギーチのいう）「シェイクスピア性

(Shakespearency)」の不成立（「どんな名前で呼ばれようとバラは甘い香りがしよう」『ロミオとジュリエット』(Act, II, Sc.2) に因む）なのか，必ずしも明確ではない.「交換の失敗は必ずしも内部量化と不斉合ではない」ことが示され [Kaplan 1986]，量化法則は「合成性」「透明性」に関わるが，「交換可能性」のほうは「合成性」に関わる「代入則」に関係するのか，むしろ名前の差異という「シェイクスピア性」に関わるのか，必ずしも明確ではない.

(1) 合成性 —— 量化法則

(a) 推論の妥当性

はじめに検討したい問題は，従属節の真理条件 p 以外に，上記の文 s，その統語論的構造 σ，その意味論的規則 m, s 中の名前の公共的対象指定法 d, s についての主体の個人的な理解の仕方 i の各因子を，どのようにして信念文の「合成性」を失わずに，かつノーマルな信念帰属を破壊することなく，信念文の意味論にとり込めるかである．たとえばつぎのような明らかに妥当な推論 (S1), (S2) を説明可能でなければならない.

(S1) [15] アリストテレスがスタゲイラ出身だ，とヒュームは信じる.
[16] アリストテレスがスタゲイラ出身だ，とフレーゲは信じる.
∴ [17] 少なくとも二人の人物は，アリストテレスがスタゲイラ出身だと信じる．($\exists x \exists y[x \neq y$ & x believes that p & y believes that $p])$

(S2) [18] フレーゲは p と信じる.
[19] N はフレーゲの信じることをすべて信じる.
($\forall p$[Frege believes that $p \rightarrow N$ believes that p])
∴ [20]N は p と信じる.

さて先の定式化 (B*)(C) 中の上記の五つの因子 s, σ, m, d, i への分割された存在量化の装置が，逆に合成性を維持する方法を示唆する．すなわち，二人の別々の人物，ヒュームとフレーゲ，またフレーゲと N とは，異なる統語論的構造をもち $[\sigma_1 \neq \sigma_2]$，あるいは対応する統語論的－措辞を異にし，したがってその意味論的規則を異にする $[m_1 \neq m_2]$ ような，元来異なる言語中の異なる文に同意していても $[s_1 \neq s_2]$，また各文に同じ公共的な対象指定法が結び

付けられていなくとも $[d_1 \neq d_2]$，あるいは各文の個人的理解の仕方を異にしていても $[i_1 \neq i_2]$，同じ真理条件を表す従属節に同意し，いわば同じ命題内容 p を信じることができるのである．私の定式化では因子 s, σ, m, d, i におけるこのような差異にもかかわらず，各人がいわば同じことを信じうるのである．というのは，これらの因子は分割された存在量化の支配下におかれているからである．

たとえば，推論 (S1) の各前提・結論の制約つき真理条件は，つぎのように分析されるべきであろう（'$A(a,s)$' は，「主体 a は文 s に同意・主張する」と読む）．

(S1*)[15*] $\exists s_1 \exists \sigma_1 \exists m_1 \exists d_1 \exists i_1 [C(p, s_1, \sigma_1, m_1, d_1, i_1) \wedge A(\text{Hume}, s_1)]$

[16*]$\exists s_2 \exists \sigma_2 \exists m_2 \exists d_2 \exists i_2 [C(p, s_2, \sigma_2, m_2, d_2, i_2) \wedge A(\text{Frege}, s_2)]$

[17*]$\exists xy[x \neq y \ \& \ \exists s_1 \sigma_1 m_1 d_1 i_1 [C(p, s_1, \sigma_1, m_1, d_1, i_1) \wedge A(x, s_1)] \wedge \exists s_2 \sigma_2 m_2 d_2 i_2 [C(p, s_2, \sigma_2, m_2, d_2, i_2) \wedge A(y, s_2)]]$.

(b) 量化と統語論的構造

元来の話し手 a が同意ないし否認した文 s 中に直接指示語 t が登場する場合，信念文の従属節 'p' は，s の真理条件と同一でなければならないから，t と同一対象を固定的に (rigid) 指示する直接指示語 t^* が 'p' 中に現れていなければならない．そしてそもそも代入則や量化法則が関わるのは，信念帰属文全体の真理値であり，それゆえその従属節の真理条件 p，したがってその中に現れる語の指示対象である．それゆえ，たとえばつぎのように，量化法則は問題なく成立するから，少なくとも代入則が関わらない限り，こうした内部量化を許す等号を含む述語信念文脈は，純粋指示的で「透明」である．

[21] ヘスペルス (*Hes*) は宵の明星であると，a は信じる．

∴ [22] 宵の明星であると a が信じるものが存在する．

その前提，結論の制約付き真理条件はつぎのようになろう．

[21*]$\exists smdi[C(E(Hes), s, m, d, i) \wedge A(a, s)]$.

[22*]$\exists x \exists s' m' d' i' [C(E(x), s', m', d', i') \wedge A(a, s')]$.

(c) 交換可能性

それでは「交換可能性」の問題はどうか．またそれは指示の同一性に関す

る代入則とどう関わるのか．

フレーゲ・ペリーのパズル：フレーゲもクリミンズ・ペリー [Crimmins and Perry 1989] も以下の推論は一見妥当ではないと認める．[21][23] が真なのに，[24] は偽でありうるからである．

[21] ヘスペルスは宵の明星だと，a は信じる．

[23] ヘスペルス＝フォスフォルス．

[24] フォスフォルスは宵の明星だと，a は信じる．

フレーゲの対策は意義と意味を区別し，信念文のような文脈中の従属節の意味は「通常の」ではなく「間接的な意味」で，通常の意義と同一視される．よって通常の意味に関しては代入則は成立しないが，間接的意味=意義に関しては代入則は成立するとみなした．しかし「直接指示説」を採ると，この路は閉ざされる．a は知らないとしても，事実 [23] は真だからである．だが先述のように，a のいわば「信念内容」である従属節の表す真理条件は，直接指示説では同一であるから，指示対象に関する限りは，「ヘスペルス (Hes)」は「フォスフォルス ($Phos$)」と代入可能であるべきであるように思われる．

先述のわれわれの分析法は，＜意味論的指示＞に関する代入則を侵犯していると断定することを控えさせる少なくとも一つの路を用意している．

[21][24] の従属節の統語論的構造に差異はないと仮定できようから，

[21*]$\exists s_1 m_1 d_1 i_1 [C(E(Hes), s_1, m_1, d_1, i_1) \wedge A(a, s_1)]$

[23]$Hes = Phos$

[24*]$\exists s_2 m_2 d_2 i_2 [C(E(Phos), s_2, m_2, d_2, i_2) \wedge A(a, s_2)]$

[21] が真である以上，[24] を偽とみなす場合でも，それは [24] の単純な全否定ではありえない．[24] の偽（つまり [24] の否定が真）になるケースは一意的でなく，否定の作用域が問題になる．[24] の偽を否定の作用域が [24*] の全体を覆う（金星がどんな名前で呼ばれようと，a はそれが宵の明星だと信じない）と解すると，[21*] の真と両立しない．[24] の偽（つまり [24] の否定の真）が，[21*][22] の真と両立するには，否定はつぎのような小作用域でなければならない．

[24#] $\exists s_2 m_2 d_2 i_2 [C(E(Phos), s_2, m_2, d_2, i_2) \wedge \neg A(a, s_2)]$.

[23] が真であり，かつ両辺に直接指示語が現れている以上，各語の指示対象は同一で，したがって [21][24] の従属節の表す真理条件は同一である他はない．それゆえ [21] を真としながら [24] を偽とする直観から帰結する「交換可能性」の不成立が関係するのは，< 意味論的指示 > そのものではなく，したがってその直観が信念文脈における < 意味論的指示 > に関する「代入則」の不成立，「合成性」の不成立をただちに確立するとはいいがたい．[24#] にみられるように，件の直観が関わっているのは，a がある特定の文 s_1 に同意しながら，異なる文 s_2 を否認した，ないし同意を差し控えたことに起因するにすぎないからである．するとここでの問題は，意味論的指示に関わる「代入則」「合成性」というよりは，むしろ信念文中の従属節に現れる名前の統語論的 – 措辞的差異に関わる「シェイクスピア性」の問題ではないか．量化の場合と同様，代入則が関わるのは，< 意味論的指示 >，つまり従属節の表す真理条件であり，直接指示語の指示対象であるからである．

(2) シェイクスピア性

様相文脈では，同じ指示対象をもつ共外延的 (co-extensional) な直接指示語同士は交換可能であるから，「シェイクスピア的」である．

しかし先のフレーゲ，クリミンズ・ペリーのように，[21] を真としつつ [24] を偽とする直観がありうること，そしてその場合の [24] を偽とする直観の根拠は，話し手 a が「ヘスペルス」と翻訳された名前の代わりに「フォスフォルス」と翻訳された従属節「フォスフォルスは宵の明星である」の元来の文には同意しないということに求められてよいであろう．するとこうした統語論的 – 措辞的差異のある名前同士は，共外延的であっても必ずしもつねに交換可能である訳ではないのである．すると先のような，一見「代入則」への反証のようにみえる例は，意味論的というよりはむしろ名前の統語論的 – 措辞的特性に関わる「シェイクスピア性」への反証なのだと思われる．

さらには，クリプキの指摘するように [Kripke 1979, p.134; 野本 1997, p.308]，一つの言語中に同一対象についての二つの名前があり，通常の翻訳ではどちらも別の言語の同じ名前に翻訳される場合には，一見「代入則」の

反証と証明の両方が得られるのである．たとえば英語には北京の名前として‘Peking’，‘Beijing’があり，いずれも日本語では「北京」へと翻訳される他はなかろう．さて人物 N は‘Peking is pretty’に同意するが，‘Beijing is pretty’には同意しないことがありうる．すると引用除去と同音翻訳からつぎのような信念帰属に移行すると，[25] は真で [26] は偽なのである．これは代入則に対する反証のようにみえる．

[25] N believes that Peking is pretty.

[26] N believes that Beijing is pretty.

さて [25] は，つぎのように翻訳される．

[27] N は，北京がきれいだと信じる．

一方，また [27] は，今度は [26] のように翻訳されたとしよう．どの翻訳も信念文全体の真理値を変えずに，かつ従属節の真理条件，したがって各名前の指示対象，を同一に保持しつつ遂行されており，「代入則」は満たされている．したがって [25] から [27] を介しての [26] への移行は代入則の「証明」になろう．ここにパラドクスがある．つまり信念文の従属節中の名前の現れに関し，われわれは単純に「代入則」の成立・不成立を断定できない状況に身をおいている．しかしこの窮境はむしろ元来の名前の統語論的－措辞的差異に基づく信念文脈の「非シェイクスピア性」を示唆する．

かくて個人的因子を分割された量化の統制下におくことによって，真理条件が同一なら，異なる主体が同じ信念をもちうるし，また量化法則も成立するから，量化述語信念文脈は「純粋指示的」で，「合成的」であり，その限り「指示的に透明」である．

また「代入則」については一見反証があるようにみえるが，代入則が元来 < 意味論的指示 > に関わるはずであるなら，逆にむしろ代入則の証明があると考えるべきだろう．交換・代入が不成立のようにみえる所以は，実は共外延的だが（共通言語内ないしは個人言語内での）異なる名前によって引き起こされているとみられ，したがって「共外延的な固有名を含む信念文に関してはいかなる結論も引き出さない」という趣旨のクリプキ [Kripke 1979] の「どっちつかずのゾーン・ディフェンス (twilight zone defence)」（カプランの用語 [1991 年の対話]）を一歩踏み出して，信念文脈は，名前に関し「非合成

的」という意味で「指示的に不透明」なのではなく，「非シェイクスピア的」（統語論的に交換不可能）であるというべきであろう．意味論的指示・真理条件が同じでも，名前（の異形）同士が異なれば，信念文の真理値は影響を受けるのである．

4.4 ダイナミック・ターン

さて 1980 年代には，「ダイナミック・ターン (the dynamic turn)」[van Benthem 1996] とも称される変動が現れた．従来の論理学，自然言語の意味論，知・信の論理的意味論などが，どちらかというと，推論結果のスタティックな定式化・検証に主眼をおくのに対し，むしろその推論過程の記述の重視，あるいは談話 (discourse) の進行につれて，先行の指示対象を維持・「照応 (anaphora)」のための代名詞などの装置にまつわる「談話表示理論 (DRT) モデル」の提示 [Kamp and Reyle 1993; 白井 1985]，またすでにフレーゲが気づいていた（[Frege 1918–19; 野本 1986, 第 7 章]），昨日の発話「今日は晴れだ」と同じことを翌日発話するには，文脈の変動による指標詞「今日」の指示の変移を調整し，「昨日は晴れだ」と言い換えねばならないという「認知的ダイナミクス (cognitive dynamics)」[Kaplan 1989, p.501] の問題，さらに一般的には，信念・知識の改定，クーンの科学革命論にみられるような理論変換，情報の流れのインパクトによる認知状態のダイナミックな変動 [Gärdenfors 1988]，さらには，数学を計算ゲームとみなし，手続き過程としての証明 (proof-as-procedure) を証明のパラダイムとみなすコンピュータ・プログラミングのダイナミック・モデル [高橋 1991; 小野 1994] や線形論理 (linear logic) の展開 [Girard *et al.* 1990; 岡田 2003; 岡本 2003; 照井 2003] といった，一連のアプローチが，従来の静的モデルに対して一斉にダイナミックな論理的意味論展開に向かいつつあるが [van Benthem 1996]，すでに大幅に制限枚数を超過したので，残念ながら今回はそうした新しい潮流には立ち入れない．

参考文献

[Aczel 1980] Aczel, P., "Frege structures and the notions of proposition, truth and set", in *The Kleene Symposium*, pp.31–59, North-Holland (1980).

[Awodey 2004] Awodey, S. and Klein, C. (eds.), *Carnap Brought Home*, The Open Court (2004).

[Badesa 2004] Badesa, C., *The Birth of Model Theory*, Princeton Univ. Press (2004).

[Benacerraf 1965] Benacerraf, P., "What numbers could not be", *Philo. Rev.*, **74** (1965). Rep. in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed., pp.272–294, Cambridge Univ. Press (1983).

[Benacerraf 1985] Benacerraf, P., "Skolem and the skeptic", *PAS*, Suppl., **59** (1985), 85–115.

[Beth 1959] Beth, E. W., *The Foundations of Mathematics*, North-Holland (1959).

[Boole 1847] Boole, G., *The Mathematical Analysis of Logic* (1847). Rep. in St. Augustine's Press (1999). 邦訳：西脇与作訳『論理の数学的分析』公論社 (1977).

[Brady 2000] Brady, G., *From Peirce to Skolem*, North-Holland (2000).

[Carnap 1934] Carnap, R., *Logische Syntax der Sprache*, Wien (1934). Tr. *Logical Syntax of Language*, Routledge Kegan Paul (1937).

[Carnap 1939] Carnap, R., *Foundations of Logic and Mathematics*, Chicago Univ. Press (1939).

[Carnap 1942] Carnap, R., *Introduction to Semantics*, vol.1, Harvard Univ. Press (1942).

[Carnap 1946] Carnap, R., "Modalities and quantification", *JSL*, **11** (1946).

[Carnap 1947] Carnap, R., *Meaning & Necessity*, Chicago Univ. Press (1947).

[Carnap 1963] Carnap, R., "Intellectual autobiography" and "The philosopher replies", in *The Philosophy of Rudolf Carnap*, The Open Court (1963).

[Chan 1974] Chan, C. C., "Model theory 1945–1971", *Proceedings of the Tarski Symposium* (1974).

[Church 1940] Church, A., "A Formulation of the simple theory of types", *JSL*, **5** (1940), 56–70.

[Church 1941] Church, A., *The Calculi of Lambda-Conversion*, Princeton Univ. Press (1941).

[Church 1943] Church, A., "Carnap's *Introduction to Semantics*", *Philo. Rev.*, **52** (1951), 298–304.

[Church 1951] Church, A., "A formulation of the logic of sense and denotation", in Henle, P. *et al.* (eds.), *Structure, Method and Meaning*, New York (1951).

[Church 1956] Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*, vol.1, Princeton Univ. Press (1956).

[Church 1973] Church, A., "Outline of a revised formulation of the logic of sense and denotation", pt. I, *Nous* 7-1, 24–34 (1973); pt. II, *Nous* 8-2, 135–156 (1974).

[Church 1982] Church, A., "A remark concerning Quine's paradox about modality", Rep. in [PA] (1982).

[Church 1993] Church, A., "A revised formulation of the logic of sense and denotation. Alternative (1)", *Nous* 27-2 (1993), 141–157.

[Crimmins and Perry 1989] Crimmins, M. and Perry, J., "The prince and the phone booth", *JP*, 86–12 (1989).

[Davidson 1979] Davidson, D., "Inscrutability of reference" (1979). 邦訳：野本和幸訳「指示の不可測性」,『真理と解釈』所収，勁草書房 (1991).

[Dedekind 1887] Dedekind, R., *Was sind und was sollen die Zahlen*? (1987). Tr. by Beman W., *Essays on the theory of Numbers*, Dover (1965). 邦訳：河野伊三郎訳『数について』岩波文庫 (1961).

[Donnellan 1966] Donnellan, K., "Reference and definite descriptions", *Philo. Rev.*, **75** (1966).

[Dummett 1973] Dummett, M., *Frege: Philosophy of Language*, Duckworth (1973).

[Feferman 2004] Feferman, S., "Interludes", in Feferman, A. B. and Feferman, S., *Alfred Tarski*, Cambridge Univ. Press (2004).

[Frege 1879] Frege, G., *Begriffsschrift* (1879).（フレーゲの著作に付加された数字は，原テキスト頁数，または遺稿集 [NS][WB] の頁数を表す.）邦訳：『概念記法』，藤村龍雄訳『フレーゲ著作集 1』勁草書房 (1999).

[Frege 1884] ([GLA]) Frege, G., *Grundlagen der Arithmetik* (1884). 邦訳：『算術の基礎』，野本和幸・三平正明・土屋俊訳『フレーゲ著作集 2』勁草書房 (2001).

[Frege 1893] ([GGA]) Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, vol.1 (1893). 邦訳：『算術の基本法則』，野本和幸・横田栄一・金子洋之訳『フレーゲ著作集 3』勁草書房 (2000).

[Frege 1891] ([FB]) Frege, G., "Funktion und Begriff," Jena (1891). Rep. in [KS]. 邦訳：野本和幸訳「関数と概念」,『フレーゲ著作集 4』勁草書房 (1999).

[Frege 1892a] ([BG]) Frege, G., "Über Begriff und Gegenstand" (1892). Rep. in [KS]. 邦訳：野本和幸訳「概念と対象」同上.

[Frege 1892b] ([SB]) Frege, G., "Über Sinn und Bedeutung" (1892). Rep. in [KS]. 邦訳：土屋俊訳「意味と意義について」同上.

[Frege 1897] Frege, G., "Über der Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene" (1897). Rep. in [KS]. 邦訳：戸田山和久訳「ペアノ氏と私の概念記法について」,『フレーゲ著作集 1』勁草書房 (1999).

[Frege 1899] Frege, G., "Brief am Hilbert" (1899.12.27) in [WB]. 邦訳：三平正明訳『フレーゲ著作集 6』勁草書房 (2002).

[Frege 1906] ([GLG]) Frege, G., "Über die Grundlagen der Geometrie" (1906). Rep. in [KS]. 邦訳：田村祐三・岡本賢吾・長沼淳訳「幾何学の基礎」,『フレーゲ著作集 5』勁草書房 (2001).

[Frege 1915] Frege, G., "Meine grundlagenden logischen Einsichten" (1915). Rep. in [NS]. 邦訳：野本和幸訳『フレーゲ著作集 4』勁草書房 (1999).

[Frege 1918–19] ([G]) Frege, G., "Der Gedanke" (1918–19). Rep. in [KS]. 邦訳：野本和幸訳「思想」,『フレーゲ著作集 4』勁草書房 (1999).

[Frege 1967] ([KS]) Frege, G., *Kleine Schriften*, hrsg. von Angelleli, Darmstadt (1967).

[Frege 1969] ([NS]) Frege, G., *Nachgelassene Schriften*, hrsg. von Gabriel *et al.* (1969).

[Frege 1976] ([WB]) Frege, G., *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg. von Hermes *et al.*, Hamburg (1976). 邦訳：野本和幸編『フレーゲ著作集 6』(書簡集) 勁草書房 (2002).

[Føllesdal 2004] Føllesdal, D., *Referential Opacity and Modal Logic* [Ph.D. Thesis Harvard 1961], Routledge (2004).

[Gärdenfors 1988] Gärdenfors, P., *Knowledge in Flux*, MIT (1988).

[Girard, Lafont and Taylor 1990] Girard, J.-Y., Lafont, Y. and Taylor, P., *Proofs and Types*, Cambridge Univ. Press (1990).

[Gödel 1929] Gödel, K., "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls" [Ph.D. Thesis at Wien University 1929]. Rep. in [Gödel 1986] vol.1.

[Gödel 1930] Gödel, K., "Die Vollständigkeit der Axime des logischen Funktionenkalkülus". Rep. in [Gödel 1986] vol.1.

[Gödel 1986] Gödel, K., *Kurt Gödel: Collected Works*, 3 vols., Oxford Univ. Press (1986).

[Grattan-Guinness 2000] Grattan-Guinness, I., *The Search for Mathematical Roots 1870-1940*, Princeten Univ. Press (2000).

[Herbrand 1929/30] Herbrand, J., "Investigations in proof theory," [Ph.D. Thesis 1929] rep. in [Herbrand 1971] and partly in [van Heijenoort 1967].

[Herbrand 1971] Herbrand, J., *Logical Writings*, Goldfarbs, W. (ed.), Dordrecht (1971).

[Hilbert and Ackermann 1928] Hilbert, D. and Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928). 邦訳：石本新・竹尾治一郎訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書 (1974).

[Hintikka 1962] Hintikka, J., *Knowledge and Belief*, Ithaca (1962).

[Hintikka 1969] Hintikka, J., *Models for Modalities*, Dordrecht (1969).

[Hodges 1997] Hodges, W., *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press (1997).

[飯田 1995] 飯田隆『言語哲学大全 III——意味と様相』勁草書房 (1995).

[飯田 2000] 飯田隆『日本語形式意味論の試み——名詞句の意味論』, 慶應大学文学部哲学科 HP (http://phil.flet.keio.ac.jp).

[Kamp and Reyle 1993] Kamp, H. and Reyle, U., *From Discourse to Logic*, I, II, Kluwer Academic Publishers (1993).

[Kaplan 1964] Kaplan, D., *The Foundations of Intensional Logics* [Ph.D. Thesis, UCLA], University Microfilms, Ann Arbor (1964).

[Kaplan 1969] Kaplan, D., "Quantifying in", in Davidson, D. and Harman, G. (eds.), *Words and Objections*, D. Reidel (1969).

[Kaplan 1986] Kaplan, D., "Opacity", in Hahn, L. D. and Schilpp, P. A. (eds.), *The Philosophy of W. V. Quine*, The Open Court (1986).

[Kaplan 1989] Kaplan, D., "Demonstratives", *Themes from Kaplan*, Oxford Univ. Press (1989).

[Kaplan 1990] Kaplan, D., "Words", *PAS*, Suppl., **64** (1990).

[Kaplan 1997] Kaplan, D., "What is meaning?" (Brief Version-Draft#1), unpublished (1997).

[Kripke 1959] Kripke, S., "A completeness theorem in modal logic", *JSL*, **24** (1959).

[Kripke 1963] Kripke, S., "Semantical considerations on modal logics", *Acta Philosophica Fennica*, **16** (1963).

[Kripke 1965] Kripke, S., "Semantical analysis of intuitionistic logic I", in Crossly, J. N. and Dummett, M. (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, Amsterdam (1965).

[Kripke 1971] Kripke, S., *Naming and Necessity*, Harvard Univ. Press (1980). 邦訳：八木沢敬・野家啓一訳『名指しと必然性』産業図書 (1985). (初出：in Davidson, D. and Harman, G. (eds.), *The Semantics of Natural Languages*, Reidel (1971).)

[Kripke 1975] Kripke, S., "Outline of a theory of truth," *JP*, **72** (1975).

[Kripke 1979] Kripke, S., "A puzzle about belief," in Margalit, A. (ed.), *Meaning and Use*, Dordrecht (1979).

[Löwenheim 1915] Löwenheim, L., "On possibilities in the calculus of relatives" (1915). Tr. in [van Heijenoort 1967].

[Marcus 1961] Marcus, R. B., "Modalities and intensional languages" (1961). Rep. in [Marcus 1993].

[Marcus 1993] Marcus, R. B., *Modalities*, Oxford Univ. Press (1993).

[Martin-Löf 1985] Martin-Löf, P., "On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws", The Atti degli Incontri di Logica Mathematica, vol.2, Secula di specialializazione in Logica Mathematica, Dipartmento di Mathematica, Universite di Siena (1985). Rep. in *Nordic Journal of Philosophical Logic*, **1**, no.1 (1996).

[Montague 1974] Montague, R., *Formal Philosophy*, with Introduction by Thomason, R., Yale Univ. Press (1974).

[Moore 1988] Moore, G. H., "The emergence of first-order logic", in Aspray, W. and Kither, P. (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Univ. of Minnesota (1988).

[野本 1977] 野本和幸「論理学から自然言語へ——モンタギュー文法を中心に」,『日本語と文化・社会 5——ことばと情報』三省堂 (1977).

[野本 1986] 野本和幸『フレーゲの言語哲学』勁草書房 (1986).

[野本 1988] 野本和幸『現代の論理的意味論』岩波書店 (1988).

[野本 1995] 野本和幸, "The semantics for belief sentences",『東京都立大学人文学報』256 (1995).

[野本 1997] 野本和幸『意味と世界』法政大学出版局 (1997).

[野本 1999–2002] 野本和幸「編者解説」『フレーゲ著作集』4（哲学論集），3（算術の基本法則），2（算術の基礎），6（書簡集），勁草書房 (1999–2002).

[野本 2003] 野本和幸『フレーゲ入門——生涯と哲学の形成』勁草書房 (2003).

[野本 2005] 野本和幸「フレーゲ論理哲学的探究の認識論的位相とメタ理論の可能性」,『科学哲学』38-2 (2005).

[野本 2006] Nomoto, K., "The methodology and structure of Gottlob Frege's logico-philosophical investigations", *The Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, **14**, no.2, 2006.

[岡田 2003] 岡田光弘「矛盾は矛盾か」,『科学哲学』36-2 (2003).

[岡本 2003] 岡本賢吾「命題を集合と同一視すること」,『科学哲学』36-2 (2003).

[小野 1994] 小野寛晰『情報科学における論理』日本評論社 (1994).

[大出 1991] 大出晁『パラドックスへの挑戦』岩波書店 (1991).

[Parsons 1981] Parsons, T., "Frege's hierarchy of indirect senses and the paradox of analysis", in *Midwest Studies in Philosophy*, VI, pp.37–58, The Univ. of Minnesota (1981).

[Peirce 1870] Peirce, C., "Description of a notation for the logic of relatives" (1870). Rep. in [Peirce 1933].

[Peirce 1880] Peirce, C., "On the algebra of logic" (1880). Rep. in [Pierce 1933].

[Peirce 1883] Peirce, C., "Note B: the logic of relatives" (1883). Rep. in [Pierce 1933].

[Peirce 1885] Peirce, C., "On the algebra of logic" (1885). Rep. in [Pierce 1933].

[Peirce 1933] Peirce, C., *Collected Papers*, vol.3, Havard Univ. Press (1933).

[Putnam 1973] Putnam, H., "Meaning and reference", *JP*, **70** (1973).

[Putnam 1981] Putnam, H., *Reason, Truth and History*, Cambridge Univ. Press (1981). 邦訳：野本和幸・中川大・金子洋之・三上勝生訳『理性・真理・歴史：内在的実在論の展開』法政大学出版局 (1994).

[Quine 1969] Quine, W. V. O., *Ontological Relativity & other Essays*, Colombia Univ. Press (1969).

[Russell 1903] Russell, B., *The Principles of Mathematics*, Cambridge Univ. Press (1903).

[Russel 1905] Russell, B., "On denoting", *Mind*, **14** (1905).

[Russell and Whitehead 1910] Russell, B. and Whitehead, A. N., *Principia Mathematica*, vol.1, Cambridge Univ. Press (1910). 抄訳：岡本賢吾・戸田山和久・加地大介訳『プリンキピア・マテマティカ』哲学書房 (1987).

[坂井 1979] 坂井秀寿『日本語の文法と論理』勁草書房 (1979).

[Salmon 1986] Salmon, N., "Reflexivity" (1986). Rep. in [PA].

[Salmon and Soames 1988] ([PA]) Salmon, N. and Soames, S., *Propositions and Attitudes*, Oxford (1988).

[三平 2000] 三平正明「フレーゲとベナセラフ」,『科学哲学』33-2 (2002).

[Schröder 1890–95] Schröder, E., *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 Bde (1890–95). Rep. Thoemmess Press (2001).

[白井 1985] 白井賢一郎『形式意味論入門』産業図書 (1985).

[Skolem 1920] Skolem, Th., "Logico-combinatorial investigations in the satisfiability or provability of mathematical propositions: A simplified proof of a theorem by Löwenheim and generalizations of the theorem" (1920). Tr. in [van Heijenoort 1967].

[Skolem 1922] Skolem, Th., "Some remarks on axiomatized set theory" (1922). Tr. in [van Heijenoort 1967].

[Skolem 1923] Skolem, Th., "The foundations of elementary arithmetic by means of the recursive mode of thought, without the use of apparent variables ranging over infinite domains" (1923). Tr. in [van Heijenoort 1967].

[Skolem 1929] Skolem, Th., "Über einige Grundlagenfragen der Mathmatik" (1929). Rep. in [Skolem 1970].

[Skolem 1933] Skolem, Th., "Über die Unmöglichkeit einer Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems" (1933). Rep. in [Skolem 1970].

[Skolem 1934] Skolem, Th., 'Bemerkung der Redaktion' (p.366) zur "Über die Nichtcharakerisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvarialen" (1934). Rep. in [Skolem 1970] and in [Tarski 1986], vol.4, p.568.

[Skolem 1958] Skolem, Th., "Une relativisation des notions mathématiques fondamentales" (1958). Rep. in [Skolem 1970].

[Skolem 1970] Skolem, Th., *Selected Works in Logic*, Fenstad, J. E. (ed.), Oslo U. F. (1970).

[高橋 1991] 高橋正子『計算論』近代科学社 (1991).

[Tarski 1932] Tarski, A., "Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen" (1932). Rep. in [Tarski 1986] vol.1.

[Tarski 1935] Tarski, A., "Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, **1** (1935). Tr. in [Tarski 1956], rep. in[Tarski 1986] vol.2.

[Tarski 1956] Tarski, A., *Logic, Semantics, Metamathematics*, ed. and tr. by Woodger, J. H., Oxford (1956).

[Tarski 1958] Tarski, A., "Remarks of A. Tarski"on [Skolem 1958] in [Tarski 1986], vol.4, p.723.

[Tarski 1986] Tarski, A., *Alfred Tarski: Collected Papers*, 4 vols., Birkhäuser, Basel (1986).

[Tarski and Vaught 1957] Tarski A., and Vaught, R., "Arithmetical extensions of relational systems," *Compositio Mathematica*, vol.13 (1957). Rep. in [Tarski 1986] vol.3.

[照井 2003] 照井一成「素朴集合論とコントラクション」,『科学哲学』36-2 (2003).

[津留 1999] 津留竜馬「スコーレムのパラドクスについて」,『哲学誌』41, 東京都立大学哲学会 (1999).

[van Benthem 1996] van Benthem, J., *Exploring Logical Dynamics*, CSLI publications, Stanford (1996).

[van Heijenoort 1967] van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press (1967).

[Wittgenstein 1921] ([T]) Wittgenstein, L., *Tractatus Logico Philosophicus* (1921). 邦訳：奥雅博訳『論理哲学論考』大修館書店 (1975)；野矢茂樹訳，岩波文庫 (2003).

[Wolenski 1999] Wolenski, J. (ed.), *Alfred Tarski and the Vienna Circle*, Kluwer (1999).

用語索引

記　号

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

人名索引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ラ 行

執筆者紹介（掲載順．*は編者）

田中一之*（たなか・かずゆき）[序・第 I 部]

1955 年生まれ．カリフォルニア大学バークレー校博士課程修了．現在，東北大学大学院理学研究科教授．Ph.D.
[主要著書]『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』（編著，日本評論社，1997），『逆数学と 2 階算術』（河合出版，1997），『数の体系と超準モデル』（裳華房，2002），『数学のロジックと集合論』（共著，培風館，2003）など．

坪井明人（つぼい・あきと）[第 II 部]

1955 年生まれ．筑波大学大学院博士課程数学研究科修了．現在，筑波大学大学院数理物質科学研究科教授．理学博士．
[主要著書]『モデルの理論』（河合文化教育研究所，1997）．

野本和幸（のもと・かずゆき）[第 III 部]

1939 年生まれ．京都大学大学院文学研究科博士課程修了．ACLS 招聘研究員（UCLA），フンボルト財団招聘研究員（Goettingen，Konstanz，Oxford），北海道大学教授，東京都立大学教授を経て，現在，創価大学文学部人文学科教授，東京都立大学名誉教授．文学博士．
[主要著書]『フレーゲの言語哲学』（勁草書房，1986），『現代の論理的意味論：フレーゲからクリプキまで』（岩波書店，1988），『フレーゲ著作集　全 6 巻』（編，勁草書房，1999–2002），『フレーゲ入門：生涯と哲学の形成』（勁草書房，2003）など．

ゲーデルと20世紀の論理学（ロジック）②
完全性定理とモデル理論

2006年10月27日　初版

[検印廃止]

編者　田中一之
発行所　財団法人　東京大学出版会
代表者　岡本和夫
113-8654 東京都文京区本郷7-3-1 東大構内
電話 03-3811-8814　Fax 03-3812-6958
振替 00160-6-59964
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　矢嶋製本株式会社

ISBN4-13-064096-8

Printed in Japan